第一卷　第一分册

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

R.柯朗　F.约翰　著



科学出版社
www.sciencep.com

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

第一卷　第一分册

R. 柯朗　F. 约翰　著

张鸿林　周民强　译

科学出版社

2001

图字: 01-98-2682

内 容 简 介

本书系统地阐述了微积分学的基本理论. 在叙述上, 作者尽量作到既严谨而又通俗易懂, 并指出概念之间的内在联系和直观背景. 原书分两卷, 第一卷为单变量情形, 第二卷为多变量情形.

第一卷中译本分两册出版. 本书为第一卷第一分册, 包括前三章, 主要介绍函数, 极限、微分和积分的基本概念及其运算. 本书包含大量的例题和习题, 有助于读者理解本书的内容.

读者对象为理工科大学师生、数学工作者和工程技术人员.

Translation from the English language edition
Introduction to Calculus and Analysis. Volume 1
by Richard Courant and Fritz John
Copyright ©1989 Springer-Verlag New York Inc.
All Rights Reserved

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分和数学分析引论. 第一卷. 第一分册 / 【美】 R. 柯朗,
【美】 F. 约翰著; 张鸿林, 周民强译. —— 北京: 科学出版社, 2001. 3
书名原文: Introduction to Calculus and Analysis, Volume 1

ISBN 7-03-008469-1

I. 微… II. ①柯…②约…③张…④周… III. 微积分 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 07141 号

科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
[illegible]印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 3 月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32
2001 年 3 月第一次印刷 印张: 11 7/8
印数: 1-3 000 字数: 307 000
定价: 24.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(北燕))

序　　言

17 世纪后期，出现了一个崭新的数学分支 —— 数学分析．它在数学领域中占据着主导地位．这种新数学思想的特点是，非常成功地运用了无限过程的运算即极限运算．而其中的微分和积分这两个过程，则构成系统微分学和积分学（通常简称为微积分）的核心，并奠定了全部分析学的基础．

当时的知识界人士立即觉察到了这些新发现和新方法的重要性，并深感震惊．然而在开始时，要掌握这一强有力的技术，是非常艰难的任务．因为那时可见到的出版物又少又不完整，还往往阐述得不清楚．所以，新领域的先驱们很快就认识到必须编写教科书，以便使更多的读者能易于接受这门学问，而不像早期只是少数知识界名流熟悉它．这件事对于数学乃至一般科学来说，确实是大有好处的．近代最大的数学家之一 —— L．欧拉 (Euler)，在他的一些导引性的著作中，就曾建立起牢固的传统体例．后来虽然在内容的清晰和简化方面作了许多改进，但是 18 世纪的那些著作至今仍然具有启发性．

自欧拉以后，继起的著作家们总是把微分学与积分学分开来论述，从而就掩盖了一个关键性问题，即微分和积分之间的互逆关系．只是到了 1927 年， R. 柯朗的 “Vorlesungen über Differential und Integalrechnung” 一书德文第一版 (Springer 出版社) 发行以后，这种隔离才消除了，微积分才成为一门统一的学问．

现在这本书的由来，要从上述德文著作及其相继的版本谈起．由于詹姆斯 (James) 和 V. 麦克沙恩 (Mcshane) 的合作，对原著作

了重大增订后的英文版 "Calculus" 一书，自 1934 年起由格拉斯哥的 Blackie and Sons 出版社编辑出版了，并经 Interscience-Wiley 出版社大量翻印在美国发行.

这些年来，由于美国的大学和学院教学上日益明显的需要，期望对此著作进行改写. 但是，因为原书至今仍在使用和保持着生命力. 所以修补原来的译本看来并不是一个好方案.

更为可取的做法是不去试图改编已有的原著，而是用一本全新的书来补充它. 这本新书应在许多方面都同欧洲的原著有关联，但要更加明确地针对美国目前的和将来的大学生的需要. 当 F. 约翰答应同 R. 柯朗一起来写这本新书时，这一计划才成为现实. (在编辑前书的英文版时， F. 约翰曾给予过很大的帮助.)

本书在形式和内容方面虽与原书显著不同，但都产生于同一的意愿，即直接把学生引向这门学科的核心，并为他们去积极运用所学到的知识做好准备. 本书避免教条式的文风，因为那样的文风不利于揭示微积分在直观现实中使之发生的动力和根源. 同时，阐明数学分析与其各种应用之间的相互作用，并强调感性认识的意义，仍然是我们这本新书的重要目的. 当然，我们也希望能稍微加强一些严格性，这并不妨碍前一目的.

数学，作为一种自封的、一环接一环的真理系统，而不涉及其起因和目的，也是有着它的诱惑力的，并且还能满足某种哲学上的需要. 但是，这种在学科本身中作内省的态度和方法，对于那些想要获得独立的智能而不要训条式的教导的学生们是不适宜的；不顾及应用和直观，将导致数学的孤立和衰退，因此，使学生和教师们不受这种自我欣赏的纯粹主义的影响，看来是非常重要的.

本书是为各种程度的学生、数学家、科学家和工程师而写的. 我们并不想掩饰困难，以造成这一门学问不难掌握的假象，而宁可从整体上阐明其内在联系和总目的来试图帮助真正有兴趣的读者. 由于对基本性质的冗长讨论会妨碍读者接触丰富的事实，我们有时将这种讨论推置于各章的补篇中.

在各章的末尾附有大量的例题和问题，有些一时不易解答，有些甚至很困难；其中大多数是对正文材料的补充．在附加部分，收集了更多的一般常用的问题和习题，并且给出答案或解法提示[1)]．

许多同事和朋友对本书都曾给予帮助． A.A. 布兰克 (Blank) 不但提出过许多尖锐而富有建设性的批评，并且在整理、增加和精选问题和练习时也起了重要作用．此外，他还承担了编写附加部分的主要任务．在本书各方面的准备工作中， A. 斯洛蒙 (Solomon) 曾给予大量的无私而有效的帮助．还要感谢 C. 约翰 (John), A. 拉克斯 (Lax), R. 理奇特米厄 (Richtmyer), 以及其他朋友、包括詹姆斯和 V. 麦克沙恩．

第一卷主要论及单变量函数，而第二卷将讨论多变量函数的微积分的各分支理论．

最后有一点请学生读者注意，要想一页一页地、毫不费力地学习这样一本书来精通这一学科，可能遭到失败．只有首先选择一些捷径，再反复地回来钻研同样一些问题和难点，才能从更高的观点得到较深刻的理解．

有些段落，读者在第一次学习时可能会遇到障碍，我们均用星号标出以示提醒．还有些比较困难的问题，也加上星号予以指明．
我们希望目前这本新的著作，对于年轻的一代科学家将有所助益．
我们深知本书有许多不足之处，因此，诚恳地欢迎批评指正，这对于本书今后的修订会有好处．

R. 柯朗， F. 约翰

1965 年 6 月

[1)] 这部分内容，由 A. A. 布兰克写成单行本 "Problem in Calculus and Analysis" 出版． —— 译者注

目　录

第一章 引 言

自古以来，关于连续地变化、生长和运动的直观概念，一直在向科学的见解挑战. 但是，直到 17 世纪，当现代科学同微分学和积分学（简称为微积分）以及数学分析密切相关地产生并迅速发展起来的时候，才开辟了理解连续变化的道路.

微积分的基本概念是导数和积分：导数是对于变化速率的一种度量，积分是对于连续变化过程总效果的度量. 正确理解这些概念以及由此产生的大量丰富成果，有赖于对极限概念和函数概念的认识，而极限和函数的概念又基于对数的连续统的了解. 只有越来越深刻地洞察微积分的实质，我们才能逐渐地赏识其威力和价值. 在引言这一章里，我们将阐明数、函数和极限的概念. 首先作一简单而直观的介绍，然后再仔细论证.

1.1 实数连续统

正整数或自然数 1,2,3,⋯⋯ 这些抽象的符号，是用来表示在离散元素的总体或集合中具有“多少个”对象的.

这些符号完全不涉及所计数的对象的具体性质，不管它们是人，是原子，是房子，还是别的什么.

自然数是计算一个总体或“集合”中元素的一种合适工具. 但是，为了达到一个同等重要的目的，如度量曲线的长度、物体的体积或重量等这样一些量，自然数便不够用了. 我们不能直接用自然数来回答“是多少？”这一类的问题. 由于极其需要用我们称之为数的事物来表示各种量的度量，我们就不得不将数的概念加以扩充，

以便能够描述度量的连续变化. 这种扩充了的数系称为**数的连续统**或"实数"系. (这是一个未加说明但一般都认可的名称.) 数的概念向连续统概念的扩充是如此自然而令人信服, 以致所有早期的大数学家和科学家都毫无疑议地予以采用. 直到 19 世纪, 数学家们才感到必须为实数系寻求一个比较可靠的逻辑基础. 随后产生的对上述概念的正确表述, 反过来又导致数学的进步. 我们将首先从不难理解的直观描述入手, 然后给出实数系的比较深入的分析[1].

a. 自然数系及其扩充. 计数和度量

自然数和**有理数**. 对于我们来说, "自然"数序列 1,2,3,⋯ 认为是已知的. 我们不需要从哲学的观点来讨论这些抽象的事物——数——究竟属于怎样的范畴, 对于数学工作者, 以及对于任何同数打交道的人来说, 重要的只是要知道一些规则或定律, 根据这些规则或定律可将一些自然数组合起来而得到另一些自然数. 这些定律构成在十进位制中那些熟知的关于数相加和相乘的法则的基础; 它们包括**交换律**: $a+b=b+a$ 和 $ab=ba$, **结合律**: $a+(b+c)=(a+b)+c$ 和 $a(bc)=(ab)c$, 分配律: $a(b+c)=ab+ac$, 相消律: 如果 $a+c=b+c$, 则可推出 $a=b$, 等等.

逆运算——减法和除法——在自然数集合中并不总是可能的; 从 1 减去 2 或者用 2 来除 1 所得的结果不能仍属于自然数集合. 为了使这些运算能够不受限制地进行, 我们不得不发明数 0、"负"整数和分数来扩充数的概念. 所有这些数的全体, 称为**有理数**系或有理数集合; 有理数全都可以由 1 经过"有理运算", 即加法、减法、乘法和除法而得到[2].

有理数总可以写为 $\frac{p}{q}$ 的形式, 这里 p 和 q 都是整数, 并且

1) 更全面的解释见 Courant and Robbins, What is Mathematics (数学是什么)? Oxford University Press, 1962

2) "有理 (rational)"一词, 在这里不是指合理或合逻辑的意思, 而是从"比 (ratio)"一词派生出来的, 即关于两个量的比.

$q \neq 0$. 我们还能使这种表示是唯一的, 只须要求 q 是正的, 而 p 和 q 没有大于 1 的公因子.

在有理数域内, 一切**有理运算**——加法、乘法、减法和除法 (用零作除数除外)——都能够实行, 而且得到的仍然是有理数. 正如我们从初等算术所知, 有理数运算所服从的定律同自然数的运算是一样的: 因此, 有理数是以完全直接的方式扩充了正整数系.

有理数的图形表示. 有理数通常可用直线 L——数轴——上的点形象地表示出来. 将 L 上的任意一点取作原点或点 0, 将另外任意一点取作 1. 这时, 我们采用这两点之间的距离作为度量的尺度或单位, 并且将从 0 到 1 的方向定义为 '正方向', 并称这样规定了方向的直线为有向直线. 习惯上, 画数轴 L 时应使得点 1 在点 0 的右边 (图 1.1).

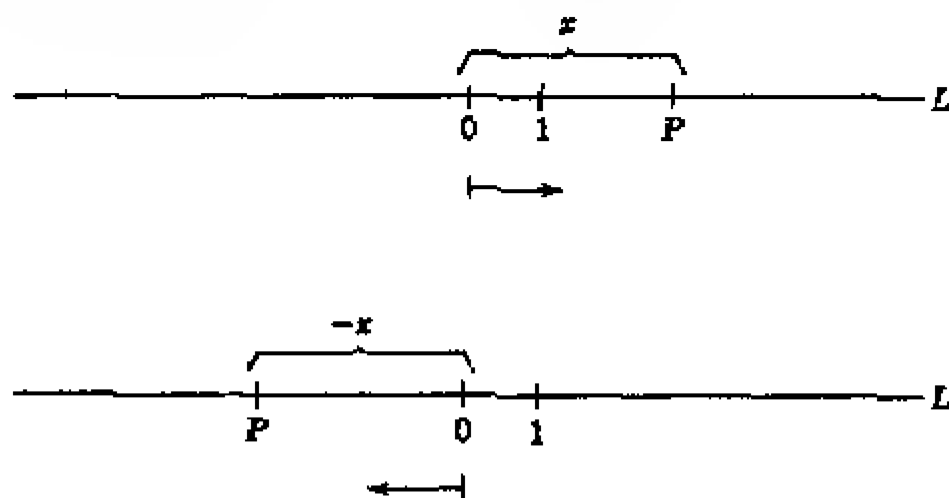


图 1.1　数　轴

L 上任何一点 P 的位置由两个因素——由原点 0 到 P 的距离和由原点 0 到 P 的方向 (指向 0 的右边还是左边)——完全确定. L 上表示正有理数 x 的点 P 是在 0 的右边与 0 的距离为 x 个单位之处. 负有理数 x, 则由 0 的左边距离 0 为 $-x$ 个单位的点来表示. 在上述两种情况下, 从 0 到表示 x 的点之间的距离均称为 x 的绝对值, 记为 $|x|$, 于是我们有

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{如果 } x \text{ 为正或零,} \\ -x, & \text{如果 } x \text{ 为负.} \end{cases}$$

我们注意，$|x|$ 决不会是负数，并且仅当 $x=0$ 时才等于零.

由初等几何我们想到，用直尺和圆规作图，可将单位长度分割为任意个相等的部分. 由此可见，任何用有理数表示的长度都能画出，所以，表示一个有理数 x 的点能用纯几何方法找到.

按这种方式，通过 L 上的点——**有理点**，我们得到有理数的一种几何表示. 同对于点 0 和点 1 的表示法相一致，我们可采用同样的符号 x 既表示有理数，又表示它在 L 上所对应的点.

两个有理数的关系式 $x<y$，其几何意义是：点 x 处于点 y 的左边，在此情况下，这两点之间的距离是 $y-x$ 个单位. 如果 $x>y$，则距离是 $x-y$ 个单位. 无论哪种情况，L 上的两个有理点 x, y 之间的距离均为 $|y-x|$ 个单位，并且仍然是有理数.

L 上端点为 a, b 的线段，这里 $a<b$，称为**区间**. 端点为 0, 1 的特定线段称为**单位区间**. 如果两端点包括在区间之内，我们就说该区间是**闭的**；如果两端点不包括在内，就说该区间是**开的**. 开区间用 (a, b) 来表示，是由满足关系式 $a<x<b$ 的点 x，即处于 a 和 b "中间"的那些点组成的. 闭区间用 $[a, b]$ 来表示，是由满足关系式 $a \leq x \leq b$ 的点组成的[1]. 在上述两种情况下，区间的长度均为 $b-a$.

对应于整数 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的各点，将数轴分割为一系列单位长度的区间. L 上的每一个点，或者是这样分割的区间之一的端点，或者是其内部的点. 如果再把每一个区间分割为 q 个相等的部分，我们就把 L 分割成一系列长度为 $\frac{1}{q}$ 的区间，区间的端点为 $\frac{p}{q}$ 的有理点. 于是，L 上的每一点 P，或者是形式为 $\frac{p}{q}$ 的有理点，或者处于两个相继的有理点 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+1}{q}$ 之间（见图 1.2）. 因为相继的两个分点距离为 $\frac{1}{q}$ 个单位，所以，我们能够找到一个有理点 $\frac{p}{q}$，这个有理点同点 P 的距离不超过 $\frac{1}{q}$ 个单位. 我们只要将 q 取成足够大的

1) 我们将关系式 $a \leq x$（读作 "a 小于或等于 x"）解释为 "或者 $a<x$ 或者 $a=x$". 对于二重符号 $\geq$ 和 $\pm$，我们也用类似的方式来解释.

上整数, 则能使数 $\frac{1}{q}$ 想要多么小就可多么小. 例如, 取 $q=10^n$(这里 n 为任一自然数), 我们就能求得一个"十进小数" $x=\frac{p}{10^n}$, 同 P 的距离小于 $\frac{1}{10^n}$. 至此, 虽然我们并未断言 L 上的每一个点都是有理点, 但是至少我们已看到, 能够求得一些有理点, 任意地接近 L 上的任何一点 P.

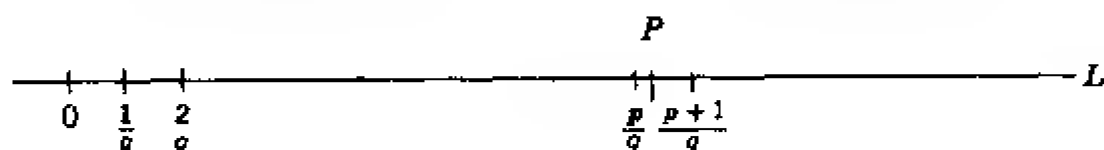


图 1.2

稠密性

L 上的给定点 P 能够用有理点来任意逼近这一事实, 可以用一句话来表达: **有理点在数轴上是稠密的**. 显然, 甚至一些较小的有理数的集合也是稠密的, 例如, 所有形如 $x=\frac{p}{10^n}$ 的点, 其中 n 为自然数, p 为整数.

稠密性表明, 在任何两个不同的有理点 a 和 b 之间, 存在着另外的无穷多个有理点, 特别是, a 和 b 之间的中点, $c=\frac{a+b}{2}$, 即数 a 和数 b 之间的算术平均值, 仍是有理点. 再取 a 和 c 的中点, b 和 c 的中点, 并且按这种方式继续进行下去, 我们能够在 a 和 b 之间求得任意多个有理点.

我们可以用有理点来接近 L 上任意点 P 的位置, 并且能够达到任何精确度. 因此, 初看起来, 似乎是只要引入有理数, 用数来确定点 P 的位置这个任务便已完成. 在物理的现实中, 各种量毕竟不能绝对精确地给出或求得, 而总会带有某种程度的不确定性; 所以, 也就可以认为各种量可用有理数来度量.

不可通约量 虽然有理数是稠密的, 但是, 作为用数来建立度量的理论基础, 有理数还是不够的. 两个量, 如果其比是有理数, 则称为可通约的, 因为可将它们表示为某同一单位的整数倍. 早在

公元前五或六世纪，希腊的数学家和哲学家已经有了惊人的、影响深远的发现：存在着一些量，这些量同给定的单位是不可通约的．特别是，存在着一些线段，这些线段不是一个给定单位线段的有理数倍．

不难给出与单位长度是不可通约的线段长度的一个例子：各边为单位长度的正方形之对角线 l．因为，根据毕达哥拉斯 (Pythagoras) 定理[1]，这个长度 l 的平方必须等于 2．所以，如果 l 是有理数，因而等于 $\frac{p}{q}$，这里 p 和 q 均为正整数，我们将有 $p^2=2q^2$．我们可以约定 p 和 q 没有公因子，因为这样的公因子在开始时就可以约掉．根据上述方程，p^2 是偶数；因此 p 本身也必定是偶数，譬如说 $p=2p'$．用 $2p'$ 来代替 p，我们得到 $4p'^2=2q^2$，或者 $q^2=2p'^2$；因而，q^2 是偶数，于是 q 也是偶数．这就表明 p 和 q 二者具有公因子 2．然而，这同我们所作的 p 和 q 没有公因子的约定相矛盾．这一矛盾是由于假设对角线长能够表示为分数 $\frac{p}{q}$ 引起的，所以这假设是错误的．

这一用反证法推导的例子，表明符号 $\sqrt{2}$ 不能对应于任何有理数．另一个例子是 π —— 圆的周长与其直径之比．证明 π 不是有理数要复杂得多，并且直到近代才做到 (兰伯特 (Lambert), 1761)．不难找到其他许多不可通约的量 (见问题 1, 第 117 页)；事实上，不可通约的量在某种意义上远比可通约的量更为普遍 (见第 109 页)．

无理数

因为有理数系对于几何学来说是不够的，所以必须创造新的数作为不可通约量的度量：这些新的数称为“无理数”．古希腊人并不注重抽象的数的概念，而是把诸如线段这样一些几何实体看作为基本元素．他们用纯几何的方法发展出不但用来运算和处理可通约(有理) 量，而且用来运算和处理不可通约量的逻辑体系．由毕达哥拉斯引入而由欧多克斯 (Eudoxus) 大大推进了的这一重要成就，在欧几里得 (Euclid) 著名的《几何学原本》中有详细的叙述．现

1) 即勾股定理 —— 译者注

代，在数的概念而不是几何概念的基础上，重建了数学，并且有了巨大发展. 随着解析几何的引入，在古代的数和几何量之间的关系当中，强调的重点被颠倒过来了，而且关于不可通约量的经典理论几乎已被忘记或忽视了. 过去作为一件当然的事情，曾经认为数轴上的每一个点对应着一个有理数或无理数，并且全体“实”数所服从的算术运算法则同有理数. 后来，直到 19 世纪，人们才感到有必要来证明这样的假设，而在戴德金 (Dedekind) 著名的小册子中终于完满地实现了，这本小册子至今仍然是引人入胜的读物 [1].

事实上，戴德金证明了这样一点：从费尔马 (Fermat) 和牛顿 (Newton) 到高斯 (Gauss) 和黎曼 (Riemann)，一切大数学家实际采用的“朴素的”方法，是沿着一条正确的道路前进的：实数系 (作为线段的长度或按其他方式定义的一些符号) 对于科学度量来说是一种谐调而完备的工具，并且在实数系中，有理数的运算法则仍然有效.

当然，关于实数系的讨论我们也可以就此止步，而直接转向微积分本身，这样做并无大妨碍. 然而，为了更深入地理解实数的概念，就应当研究下述内容以及本章的补篇，这对于我们今后的工作是必要的.

b. 实数和区间套

现在，让我们把直线 L 上的各点看作为连续统的基本元素. 我们假设，L 上的每一个点有一个“实数”x 与之相对应，即此点的坐标，并且假设，对于实数 x、y 来说，前面针对有理数所描述的那些关系仍然保持着原有的意义. 特别是，关系式 $x<y$ 表示在 L 上的次序，表达式 $|y-x|$ 指的是点 x 和点 y 之间的距离. 基本问题在于，去说明实数 (或者关于几何上给定点的连续统的度量) 同

---

1) R. Dedekind, “Nature and Meaning of Number(数的性质和意义)”，载于 Essays on Number, London and Chicago, 1901.（这些短文中的第一篇、“连续性和无理数”，对于实数的定义和运算定律作了详细的说明.）曾以“Essays on the Theory of Numbers”为题重印，Dover, New York, 1964. 这些译本的原文，是在 1887 年以“Was sind und was sollen die Zahlen?(数是什么和应当是什么？)”为题发表的.

原来考虑过的有理数，因而最终同整数的关系．此外，我们还必须阐明如何对这个“数的连续统”的元素进行运算，使其方式同有理数运算一样．最后，我们将不依赖于直观的几何概念而独立地表述数的连续统的概念，不过我们暂且把一些比较抽象的讨论推置于补篇当中．

我们怎样描述一个无理实数呢？对于像 $\sqrt{2}$ 和 π 这样一些数，我们能够给出简单的几何表征，但这并不总是容易做到的．足以产生每一个实数点的一种通用可行的方法，乃是通过越来越精确的有理近似值数列来描述数值 x. 特别是，我们将从左、右两边同时逼近 x, 其精确度逐次增高，而使得误差的界限趋向于零．换句话说，我们采用这样一个包含 x 的端点为有理数的区间“序列”，其中每一个区间都包含着下一个区间，而且使得此序列中充分靠后的那些区间，其区间的长度，随同其近似值的误差，小于任何预先指定的正数．

首先，设 x 含于闭区间 $I_1 = [a_1, b_1]$ 之中，即

$$a_1 < x \leq b_1,$$

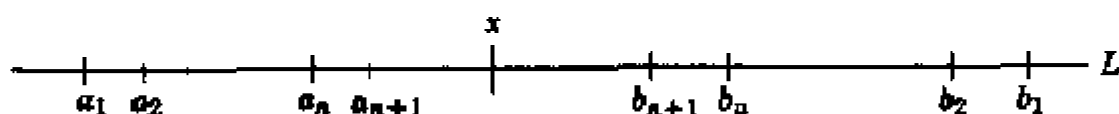


图 1.3　区间套序列

这里 a_1 和 b_1 都是有理数 (见图 1.3). 在 I_1 之中，我们考虑一个包含 x 的“子区间” $I_2 = [a_2, b_2]$, 即

$$a_1 \leq a_2 \leq x \leq b_2 \leq b_1,$$

这里 a_2 和 b_2 都是有理数．例如，我们可以取 I_1 的某一半作为 I_2, 因为 x 必定处在区间的这一半或那一半之中．在 I_2 之中，我们也考虑包含 x 的子区间 $I_3 = [a_3, b_3]$,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 < x \leq b_2 \leq b_2 \leq b_1.$$

这里 a_3 和 b_3 都是有理数，如此等等．我们要求区间 I_n 的长度随 n 增加而趋向于零，即对于所有足够大的 n，I_n 的长度小于任何预先指定的正数．一个闭区间 $I_1, I_2, I_3, \cdots$ 的集合，其中每一个都包含着下一个并且其长度趋向于零，我们称它为"区间套序列"．点 x 由区间套序列唯一确定，即没有另一点 y 能够处于所有 I_n 之中，因为，只要 n 足够大，x 和 y 之间的距离就会超过 I_n 的长度．由于这里我们总是选取有理点作为 I_n 的端点，又因为具有有理端点的每一个区间由两个有理数来描述，于是我们看到，L 上的每一个点，即每一个实数，能够由无穷多个有理数来准确地描述．逆命题并不是显而易见的；我们将把它当作一个基本公理来接受．

区间套公理．如果 $I_1, I_2, I_3, \cdots$ 是一个具有有理端点的区间套序列，则存在一个点 x 包含于所有的 I_n 之中[1]．

正如我们将会看到的，这是一个连续性公理．这个公理保证实轴上没有空隙存在．我们将用这个公理作为实数连续统的特征，并且来论证可进行一切极限运算，而这些运算乃是微积分和数学分析的基础．（正如我们以后将会看到的，这个公理还有许多其他的表达方式．）

c．十进小数．其他进位制

无限十进小数．人们熟知的用无限十进小数来描述实数，乃是定义实数的许多方法之一．虽然可以用无限十进小数而不是数轴上的点取作为基本对象，但是我们还是愿意从一种更有启发性的几何方法入手，即借助于区间套序列来规定实数的无限十进小数表示．

设由整数将数轴分为一些单位区间．则点 x 或者处于两个相继的分点之间，或者本身就是一个分点．在这两种情况下，都至少

1) 对于区间套序列来说，强调区间 I_n 都是闭的，这一点很重要．例如，如果 I_n 表示区间 $0 < x \le \frac{1}{n}$，这时，每一个区间 I_n 都包含着下一个区间，并且区间的长度趋向于零；但是，并不存在属于所有 I_n 的点 x．

存在一个整数 c_0, 使得

$$c_0 < x < c_0 + 1,$$

于是, x 属于闭区间 $I_0 = [c_0, c_0 + 1]$. 我们用 $c_0 + \frac{1}{10}, c_0 + \frac{2}{10}, \cdots, c_0 + \frac{9}{10}$ 这些点将 I_0 分为十等分. 这时, 点 x 必须至少属于 I_0 的一个闭子区间 (如果 x 是一个分点, 则可能属于两个相邻的闭子区间). 换句话说, 存在一个数字 c_1(即整数 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 之一), 使得 x 属于由

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 \leq x \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{10}$$

给定的闭区间 I_1. 再将 I_1 分为十等分, 我们可以找到一个数字 c_2, 使得 x 处于由

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 \leq x \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 + \frac{1}{100}$$

给定的区间之中. 我们重复进行这一过程. 经过 n 步以后, x 就被限定在由

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}c_n \leq x \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}c_n + \frac{1}{10^n}$$

给定的区间 I_n 之中, 这里 $c_1, c_2, \cdots$ 都是数字. 区间 I_n 的长度为 $\frac{1}{10^n}$, 当 n 增大时趋向于零. 显然, I_n 构成一个区间套序列, 因此 x 由 I_n 唯一确定. 因为只要给定 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 这些数, I_n 便为已知, 于是我们看出, 任意实数完全能由整数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 构成的无穷序列来描述, 这里除 c_0 以外, $c_1, c_2, \cdots$ 全都只取由 0 到 9 之中的数值. 如果采用通常的十进位表示法, x 和 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 之间的关系则可写为

$$x = c_0 + 0.c_1c_2c_3\cdots$$

(如果整数 c_0 是正的, 则 c_0 本身通常也按十进位表示法写出.) 反之, 根据连续性公理, 每一个写成这种无限十进小数的表达式的数都表示一个实数.

对于同一个数, 可能有两种不同的十进小数表示法; 例如,

$$1=0.99999\cdots=1.00000\cdots.$$

在我们上面建立的表达式中, 整数 c_0 由 x 唯一确定, 除非 x 本身就是整数. 在 x 是整数的情况下, 我们可以选取 $c_0=x$ 或 $c_0=x-1$. 一旦作出某种选择, c_1 便是唯一的了, 除非 x 是将 I_0 分为十等分时的新分点之一. 继续进行下去, 我们可以看出, c_0 以及所有的 c_k 都由 x 唯一确定, 除非在某一步 x 本身就是一个分点. 如果在第 n 步 x 第一次作为分点, 那么

$$x=c_0+\frac{1}{10}c_1+\cdots+\frac{1}{10^n}c_n,$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是一些数字, 并且 $c_n>0$, 因为否则, 在前面某一步 x 就已是一个分点. 由此可知, I_{n+1} 或者是区间 $\left[x,x+\frac{1}{10^{n+1}}\right]$, 或者是区间 $\left[x-\frac{1}{10^{n+1}},x\right]$. 在第一种情况下, x 是此后所有区间 $I_{n+2},I_{n+3},\cdots$ 的左端点, 而在第二种情况下, 则是右端点. 于是, 我们得到十进小数表达式

$$x=c_0+0.c_1c_2\cdots c_n000\cdots$$

或者表达式

$$x=c_0+0.c_1c_2\cdots(c_n-1)99999\cdots.$$

因此, 只是对于那些可写成以 10 的幂次为分母的分数之有理数 x, 才会出现存在两种不同表达式的情况. 我们可以去掉那些从某一位以后所有数字都是 9 的十进小数表达式而排除这种不确定性.

在实数的无限十进小数表示法中, 数 10 所起的特殊作用完全是偶然的. 十进位制之所以得到广泛采用, 唯一明显的理由是用我们的手指十个十个地数起来很方便. 其实, 任何大于 1 的整数 p 也

都可以起同样的作用．为此，我们可以在每一步都将区间分为 p 等分．这时，实数 x 将表示为如下形式：

$$x = c_0 + 0.c_1c_2c_3 \cdots,$$

其中 c_0 是一个整数，而现在 $c_1, c_2, \cdots$ 取 $0,1,2,\cdots,p-1$ 之中的一个值．这个表达式由区间套序列，即

$$c_0 + \frac{1}{p}c_1 + \cdots + \frac{1}{p^n}c_n < x \leq c_0 + \frac{1}{p}c_1 + \cdots + \frac{1}{p^n}c_n + \frac{1}{p^n},$$

再次表示出实数 x．如果 x 为正或为零，则整数 c_0 也为正或为零，而 c_0 本身具有下列形式的有限展开式：

$$c_0 = d_0 + pd_1 + p^2d_2 + \cdots + p^kd_k,$$

这里 $d_0, d_1, \cdots, d_k$ 取 $0, 1, \cdots, p-1$ 之中的一个值．于是 x 的"以 p 为进位基数"的完整表达式取下列形式：

$$x = d_kd_{k-1}\cdots d_1d_0.c_1c_2c_3\cdots.$$

如果 x 为负，我们则可对 $-x$ 采用这种表达式．

非 10 基数的系统实际上已得到了广泛采用．天文学家们仿效古巴比伦人，在许多世纪中始终把一些数表示为以 $p=60$ 为基数的"六十进位"分数．

二进位表示法． 以 $p=2$ 为基数的"二进位"制具有特殊的理论意义，并且在计算机的逻辑设计中很有用．在二进位制中，各位数字只能取两个值，即 0 和 1．例如，数 $\frac{21}{4}$ 写为 101.01，它与公式

$$\frac{21}{4} = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2^2} \cdot 1$$

相对应（见图 1.4）．

实数的运算． 虽然实数的定义及其无限十进小数表示法或二进位表示法等等都很直接了当，可是，要说明完全像有理数的情况

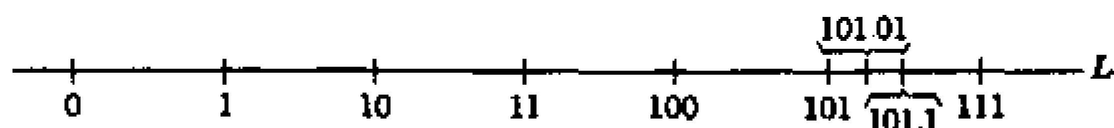


图 1.4　二进位制中的分数 $\frac{21}{4}$

那样，完成有理运算并且仍然遵循诸如结合律、交换律和分配律这些算术运算法则，也能对实数连续统进行运算，这一点看来并不是显而易见的．不过，其证明仍是简单的，尽管有些冗长烦琐．为了不妨碍了解数学分析的生动内容，我们不在此处处理这个问题，而暂且承认对于实数可以进行通常的算术运算．当我们揭示了极限的思想及其含义时，对于数的概念所依据的逻辑结构就会得到更深一步的理解．（见本章补篇，第 96 页．）

d. 邻域的定义

不仅实数的有理运算，而且实数的顺序关系或不等式，都服从在有理数系中同样的法则．

由一对实数 a 和 $b(a<b)$ 也能给出闭区间 $[a,b](a\leq x\leq b)$ 和开区间 $(a,b)(a<x<b)$．我们常常将点 x_0 同包含着这一点的各种开区间联系起来，特别是以这一点为中心的开区间，并且称这些开区间为点 x_0 的**邻域**．更确切地说，对任一正数 ε，点 x_0 的 ε **邻域**是满足不等式 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ 的 x 点组成的，即区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$．任何包含点 x_0 的开区间 (a,b)，也总包含有一个 x_0 的邻域．

定义了具有实端点的区间之后，我们就能用如在有理数端点情况时一样的定义来构成**区间套序列**．任何具有实数端点的区间套序列，都存在一个包含于所有区间之中的实数，这一结论对于微积分逻辑上的相容性来说，是最重要的（见补篇第 99 页）

e. 不等式

基本法则

不等式在高等数学中所起的作用要比在初等数学中大得多. 一个量 x 的精确值往往难以确定，不过，对 x 进行估值，即指明 x 大于某个已知量 a 而小于另一个已知量 b，却可能是容易做到的. 在许多应用中，重要的只是知道 x 的这种估值. 所以，我们简略地回顾一下关于不等式的一些基本法测.

两个正实数之和或积仍然是正数，这是一个基本事实；即如果 $a>0$ 和 $b>0$，则有 $a+b>0$ 和 $ab>0$. 而且，依据：不等式 $a>b$ 等价于 $a-b>0$，因此，两个不等式 $a>b$ 和 $c>d$ 能够**相加**而得到不等式 $a+c>b+d$，这是因为

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$$

作为两个正数之和应为正数.（不能将上面两个不等式相减而得到 $a-c>b-d$. 为什么？）不等式能够**乘以正数**；即如果 $a>b$ 和 $c>0$，则有 $ac>bc$. 为了证明这一点，我们注意到

$$ac-bc=(a-b)c$$

是正数，因为它是两个正数之积. 如果 c 是负数，则我们可以由 $a>b$ 推出 $ac<bc$. 更一般地，由 $a>b>0$ 和 $c>d>0$，可以得到 $ac>bd$.

不等式具有**传递性**，在几何上这是显然的，即如果 $a>b$ 而 $b>c$，则 $a>c$. 传递性[1] [illegible]可由和

$$(a-b)+(b-c)=a-c$$

为正直接推出. 在上述推演中如果我们处处都用符号 $\geq$ 代替 $>$，则各项法则仍然成立.

---

1) 传递性说明可以用复合公式“$a<b<c\cdots$”来表示“$a<b$ 和 $b<c$ 等等”. 像 $x<y>z$ 这样的非传递的排列应避免，这样的排列容易引起混淆和误解.

设 a 和 b 都是**正数**，并且注意到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

则因为 $a+b$ 是正的，从而由 $a>b$ 可以推出 $a^2>b^2$. 这样，正数之间的不等式可以进行"平方"运算. 类似地，如果 $a>b>0$，则有 $a^2>b^2$. 由于等式

$$a-b=\frac{1}{a+b}(a^2-b^2)$$

对于一切正数 a 和 b 都成立，则可得知逆运算也正确；即对于正数 a 和 b，由 $a^2>b^2$ 可以推出 $a>b$. 把这一结论用于数 $a=\sqrt{x}$ 和 $b=\sqrt{y}$（x,y 为任意正实数），我们得到[1]：当 $x>y$ 时，则有 $\sqrt{x}>\sqrt{y}$. 更一般地，如果 $x\geq y\geq 0$ 则有 $\sqrt{x}\geq\sqrt{y}$. 因此，在非负实数之间的不等式两端能够取平方根.

假设 a 和 b 是正数，而 n 是正整数. 在分解式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

之中，第二个因子是正的. 因此，a^n-b^n 和 $a-b$ 符号相同；如果 $a^n>b^n$ 则 $a>b$，而如果 $a^n<b^n$，则 $a<b$.

我们将要遇到的大多数不等式，是以对于一个数的绝对值的估计的形式出现的. 我们回想到当 $x\geq 0$ 时 $|x|$ 定义为 x，当 $x<0$ 时则定义为 $-x$. 我们也可以说，当 x 不为零时，$|x|$ 是 x 和 $-x$ 两数中之较大者，当 x 为零时，$|x|$ 则等于它们二者. 因此，不等式 $|x|\leq a$ 表示：x 和 $-x$ 都不超过 a，即 $x\leq a$ 和 $-x\leq a$. 因为 $-x\leq a$ 等价于 $x\geq -a$，所以我们看出：不等式 $|x|\leq a$ 意味着 x 位于以 0 为中心长度为 $2a$ 的闭区间 $-a\leq x\leq a$ 之中. 不等式

1) 由此以后，对于 $z\geq 0$，符号 $\sqrt{z}$ 表示一个非负数，其平方等于 z. 按照这个规定，对于任何实数 c，有 $|c|=\sqrt{c^2}$，因为 $|c|\geq 0$ 和 $|c|^2=c^2$. 由此，我们得到重要的恒等式 $|xy|=|x|\cdot|y|$，因为

$$|xy|^2=(xy)^2=x^2y^2=(|x|\cdot|y|)^2$$

$|x-x_0|\le a$ 则表示 $-a\le x-x_0\le a$, 或者 $x_0-a\le x\le x_0+a$, 即 x 位于以 x_0 为中心长度为 $2a$ 的闭区间之中 (见图 1.5). 同样, 点 x_0 的 ε 邻域 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, 即开区间 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, 能够用不等式 $|x-x_0|<\varepsilon$ 来描述.

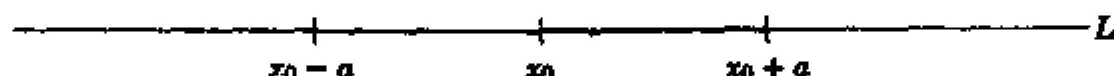


图 1.5 区间 $|x-x_0|\le a$

三角不等式

对于任何实数 a,b 的所谓三角不等式

$$|a+b|\le|a|+|b|,$$

乃是关于绝对值的最重要的不等式之一. "三角不等式" 这个名称对于等价的不等式

$$|\alpha-\beta|\le|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$$

来说更为合适, 这里我们已令 $a=\alpha-\gamma, b=\gamma-\beta$. 后一不等式的几何解释是: 从 α 到 β 的直达距离小于或等于经过第三点 γ 的两段距离之和. (此不等式还相应于下述事实: 在任何三角形中, 两边之和大于第三边.)

不难给出三角不等式的正式证明. 为此, 我们区别两种情况: $a+b\ge 0$ 和 $a+b<0$. 在第一种情况下, 三角不等式成为 $a+b\le|a|+|b|$, 这显然可由不等式 $a\le|a|$ 和 $b\le|b|$ 相加而得到. 在第二种情况下, 三角不等式化为 $-(a+b)\le|a|+|b|$, 这个不等式由 $-a\le|a|$ 和 $-b\le|b|$ 相加便可得到.

我们可以直接推出关于三个量的一个类似不等式:

$$|a+b+c|\le|a|+|b|+|c|,$$

因为，应用两次三角不等式，就有

$$|a+b+c| = |(a+b)+c| \le |a+b| + |c|$$
$$\le |a| + |b| + |c|.$$

同理，可得更一般的不等式

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

有时，我们需要 $|a-b|$ 的下限估值. 我们注意到

$$|a| = |(a+b) - b| \le |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|,$$

因此，下列不等式成立：

$$|a+b| \ge |a| - |b|.$$

柯西 (Cauchy)-施瓦兹 (Schwarz) 不等式

某些最重要的不等式是利用了下述明显的事实：实数的平方决不会是负的，因而平方之和也不能是负的. 由此所得到的最常用的不等式之一，便是柯西—施瓦兹不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

设

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2,$$
$$B = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$
$$C = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2,$$

此不等式则变为 $AC \ge B^2$. 为了证明，我们注意到，对于任何实数 t，有

$$0 \le (a_1 + tb_1)^2 + (a_2 + tb_2)^2 + \cdots + (a_n + tb_n)^2,$$

因为右端是一些平方之和. 将每一个平方展开, 并且按 t 的幂次排列, 我们得到: 对于所有 t

$$0 \le A + 2Bt + Ct^2,$$

其中, A, B, C 的含意和上面指出的一样. 这里 $C \ge 0$. 我们可以假设 $C > 0$, 因为当 $C = 0$ 时, 必定有 $B^2 = AC = 0$. 于是, 将 t 用特殊值 $t = -\frac{B}{C}$ [相应于二次式

$$A + 2Bt + Ct^2 = C\left(t + \frac{B}{C}\right)^2 + \left(A - \frac{B^2}{C}\right)$$

的极小值] 来代替, 我们得到

$$0 \le A - \frac{2B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = \frac{AC - B^2}{C}$$

因而, $AC - B^2 \ge 0$.

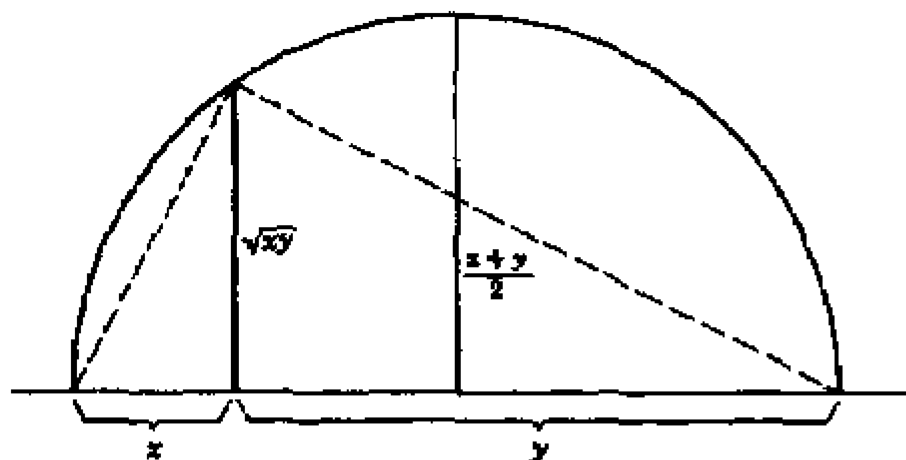


图 1.6　x 和 y 的几何平均值和算术平均值

在 $n = 2$ 的特殊情况下, 我们选取

$$a_1 = \sqrt{x}, a_2 = \sqrt{y}, b_1 = \sqrt{y}, b_2 = \sqrt{x},$$

这里 x 和 y 都是正数. 这时, 柯西—施瓦兹不等式成为 $(2\sqrt{xy})^2 \le (x+y)^2$ 或者

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}.$$

此不等式表明：两个正数 x, y 的几何平均值 $\sqrt{xy}$ 决不超过其**算术平均值** $\frac{x+y}{2}$. 如果直角三角形的高将斜边分为两个线段，其长度分别为 x 和 y，则两个数 x, y 的几何平均值就可解释为此高的长度．因此，上述不等式表明，在直角三角形中，斜边上的高不超过斜边的二分之一 (见图 1.6)[1]．

1.2 函数的概念

自 17 世纪起近代数学产生以来，函数的概念一直是处于数学思想的真正核心位置．(首先使用"函数"一词的看来是莱布尼兹 (Leibnitz)．虽然函数关系这一概念的重要意义远远超出了数学领域，我们自然还是要把注意力集中于数学意义下的函数，即在数学量之间通过数学关系式、或某种数学上的约定，或"运算子"而形成的联系．数学和自然科学的绝大部分都受着函数关系的支配，因为在数学分析、几何学、力学以及其他学科当中，函数关系到处都会出现．例如，理想气体的压力是密度和温度的函数；运动着的分子的位置是时间的函数；圆柱体的体积和表面积是其半径和高的函数．只要一些量 $a, b, c, \cdots$ 的值由另一些量 $x, y, z, \cdots$ 的值来确定，我们就说 $a, b, c, \cdots$ **依赖于** $x, y, z, \cdots$，或者说是 $x, y, z, \cdots$ 的**函数**．下面通过表达式来给出函数关系的一些例子．

(a) 公式 $A = a^2$ 将 A 定义为 a 的函数．当 $a > 0$ 时，我们可以把 A 解释为边长为 a 的正方形的面积．

(b) 对于一切满足 $-1 \leq x \leq 1$ 的 x，公式

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

将 y 定义为 x 的函数．当 $x > 0$ 时，此函数表示在斜边为 1 的直角三角形中，一个直角边 y，可由另一个边 x 确定．

---

1) 有兴趣的读者，可在下列著作中找到更多的资料：E. F. Beckenbach and R. Bellman, An Introduction to Inequalities (不等式引论), Random House, 1961 以及 N. Karzarinoff, Geometric Inequalities(几何不等式), Random House, 1961

(c) 对于每一个 t，方程

$$x = t, \quad y = -t^2$$

确定了 x 和 y 的值，于是将 x 和 y 定义为 t 的函数．如果我们把 x 和 y 解释为平面上点 P 的直角坐标，把 t 解释为时间，那么，上述方程描述了点 P 在时刻 t 的位置；换句话说，这些方程描述了点 P 的**运动**．

(d) 方程

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，将 a 和 b 定义为 x 和 y 的函数．如果把 x, y 和 a, b 这两对值解释为两个点的直角坐标，我们则可看出，上述方程对每一个点 (x, y) [坐标原点 $(0, 0)$ 除外]，确定了一个"映像"(a, b)．读者不难证明，像点 (a, b) 和"原像点"(x, y) 总是处在由坐标原点出发的同一条射线上，与原点的距离则为原像点与原点距离的倒数．因此，我们就说通过上述用 x, y 来表示 a, b 的方程把 (x, y) 映射为 (a, b)．

在以上各例中，函数规律是通过简单的公式来表示的，这些公式用一些量确定另一些量[1]．公式左端出现的各量——"因变量"，都是由右端的"自变量"来表示的．对于自变量的给定值确定因变量的唯一值的数学规律，称为函数．函数规律不受这些变量的名称 x, y，等等的影响．在例 c 中，有一个自变量 t 和两个因变量 x, y；在例 d 中，则有两个自变量 x, y 和两个因变量 a, b．

y 通过函数关系依赖于 x，常常简单地表述为："y 是 x 的函数"[2]．

---

1) 以后我们将会逐渐认识到，有必要考虑不能用这种简单公式来表示的一些函数（例如见第 28 页）．

2) 这种说法在自然科学中已随意使用，而只是在一些比较拘谨的文章中才避免它．只要是无关大局，我们都不去过分追求不必要的"严格"而来束缚自己的手脚，因为这样做并无好处．

函数的定义域和值域

在几何上，我们通常把自变量解释为一维或多维空间中一个点的坐标．在例 b 中，这就是 x 轴上的点，在例 d 中，是 x,y 平面上的点．有时，像在例 a 和例 c 中那样，自变量可以随意取所有的值．可是，常常存在着一些固有的或附加的限制，因而我们考虑的函数并不是对于所有的值都有定义．使得函数有定义的那些值或点的集合，构成函数的“定义域”．在例 a 中，定义域是整个 a 轴，在例 b 中，是区间 $-1 \leq x \leq 1$，在例 c 中，是整个 t 轴，而在例 d 中，则是 x,y 平面上除坐标原点以外的各点．

对于定义域中的每一个点 P，函数规定了因变量的确定值．也可以把这些值解释为点 Q——点 P 的像——的坐标．于是我们说，函数将点 P“映射”为点 Q．这样，在例 d 中，x,y 平面上的点 $P=(1,2)$ 被映射为 a,b 平面上的点 $Q=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$．我们说像点 Q 构成函数的所谓值域[1]．此值域中的每一个点 Q，乃是函数定义域中一个(或多个)点的像．

在例 c 中，t 轴上的各点，都有在 x,y 平面上的点作为它们的像点．t 轴**被映射到** x,y 平面上．然而，并不是 x,y 平面上的每一点都作为像点出现，而只是满足 $y=-x^2$ 的那些点才是像点．因此，这一映射的值域是抛物线 $y=-x^2$．我们说 t 轴**被映射为**抛物线 $y=-x^2$，其意义是指其象点充满了这一条抛物线．

在例 d 中，值域是由 a,b 平面上的一些点 (a,b) 组成的，其坐标可以写为 $a=\frac{x}{x^2+y^2}, b=\frac{y}{x^2+y^2}$ 的形式，其中 x,y 应取 $x^2+y^2\neq 0$ 的值．换句话说，值域是由使得上述方程具有解 (x,y) 的那些点 (a,b) 组成的．立即可以看出，这一值域包括那些 a 和 b 不能同时为零的点 (a,b)；每一个这样的点 (a,b)，是点 $x=\frac{a}{a^2+b^2}, y=$

1) 把点 Q 称为 P 的“函数”常常是很方便的，虽然在解析表达式中会出现表示 Q 的不同坐标的几个函数．

$\frac{b}{a^2+b^2}$ 的像. 于是, x,y 平面上的每一个几何图形都被映射为 a,b 平面上的一个相应的图形, 此图形是由前一图形各点的像点组成的. 例如, 围绕坐标原点的圆 $x^2+y^2=r^2$, 被映射为 a,b 平面上的圆 $a^2+b^2=\frac{1}{r^2}$.

在本章和以后各章中, 我们几乎完全是研究单个自变量 (譬如说 x) 和单个因变量 (譬如说 y) 的情况, 正如在例 b 中所表明的那样[1]. 这种函数, 我们通常是按标准方式, 用它在 x,y 平面上的图形, 即用由点 (x,y) 组成的曲线来表示的, 曲线各点的纵坐标 y 同横坐标 x 满足特定的函数关系 (见图 1.7). 对于例 b 来说, 其图形是围绕着坐标原点半径为 1 的圆的上半部.

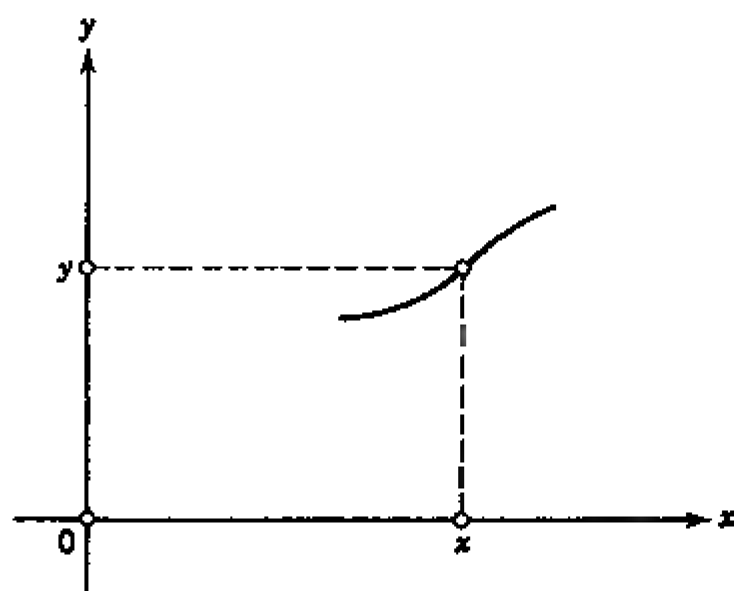


图 1.7 函数的图形

另外, 如把函数解释为由 x 轴上的定义域到 y 轴上的值域的映射, 还可得到函数的另一种形象描述. 这里我们不是把 x 和 y 解释为 x,y 平面上同一点的坐标, 而是解释为两个不同的独立的数轴上的点. 于是, 函数就把 x 轴上的点 x 映射为 y 轴上的点 y. 这种映射在几何学中是常常会出现的, 例如, 把 x 轴上的点 x 投影到平行的 y 轴上的点 y(投影中心 0 处于两轴所在平面内) 时所产生的 "仿射" 映射 (见图 1.8). 不难断定, 这一映射可用线性函数 $y=ax+b$(其

1) 然而, 从一开始就应着重指出: 在许多场合多变量函数的出现是很自然的. 在第二卷中, 将系统地讨论多变量函数.

中 a 和 b 均为常数) 解析地表示. 显然, 仿射映射是 "一对一" 的映射, 其中每一个映象 y 反过来又对应着唯一的原象 x. 另一个更为一般的映射是由同一类投影定义的 "透视映射", 只是, 两轴不一定平行. 其中, 解析表达式由形如 $y=(ax+b)/(cx+d)$ 的有理线性函数给出, 其中 a,b,c,d 均为常数.

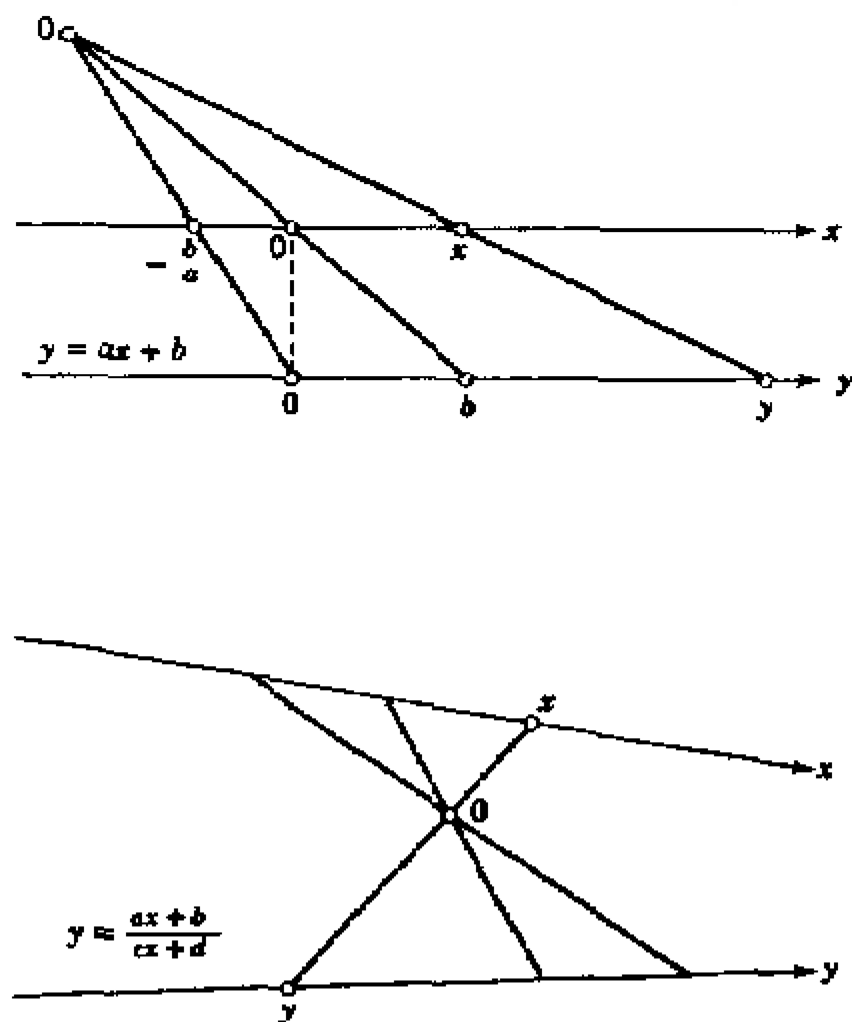


图 1.8 映射

由某一中心 N 将空间中的一个曲面 S 向另一曲面 S' 所做的任何投影, 均可看作为一个映射, 其定义域是 S, 而值域处于 S' 上. 例如, 将球上的每一点 P 通过由**北极**发出的射线投影到赤道平面上的点 P', 我们便可将此球映射为赤道平面 (见图 1.9). 这个映射就是在画地图时常常使用的 "球极平面投影". 许多这种类型的例子, 使得我们想到把函数解释为 "映射".

当包含多个自变量和多个因变量时, 用映射来定义函数, 比用

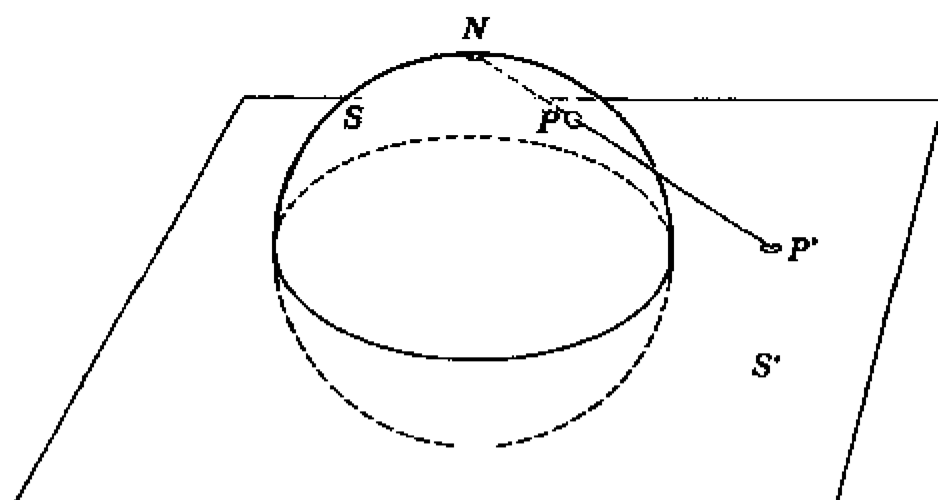


图 1.9　球极平面投影

图形来定义，可以提供更灵活、更适宜的解释．这一事实，在第二卷中将会变得十分明显．

b．单连续变量的函数概念的定义．函数的定义域和值域

单个自变量 x 的函数，是讲对于一些 x 值，确定了一些 y 值．而函数的**定义域**就是使得函数有定义的 x 值的全体．在我们所关心的情况中，函数的定义域大都是由一个或几个区间组成的（见图 1.10）．这时，我们就说 y 是**连续变量**的函数．（在另一些情况下则相反，例如，可能只是对于 x 的有理数或整数值，函数才有定义．）这里，构成定义域的"区间"，可以包含其端点也可以不包含其端点，并且可以在一个方向或两个方向上延伸到无穷远[1]．于是，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 定义在闭区间 $-1\le x\le +1$ 上，函数 $y=\frac{1}{x}$ 定义在两个半无穷开"区间" $x<0$ 和 $x>0$ 上，函数 $y=x^2$ 定义在由一切 x 组成的无穷"区间" $-\infty<x<+\infty$ 上，函数 $y=\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}$ 定义在两个互相分离的区间 $1\le x\le 2$ 和 $-2\le x\le -1$ 上．

函数用 f,F,g 等这样一些符号来表示．而 x 与其相对应的 y 值之间的对应关系则写为 $y=f(x), y=F(x)$ 或 $y=g(x)$ 等形式，

1) 我们通常只是对于"有界的"即"有限的"区间，才使用"区间"一词，其端点为确定的有限值；因而，本书中所用的更广泛的概念，可用"凸集"一词来表示，它指的是这样的集合：该集合如果包含两个点，则必定包含两点中间的所有的点．

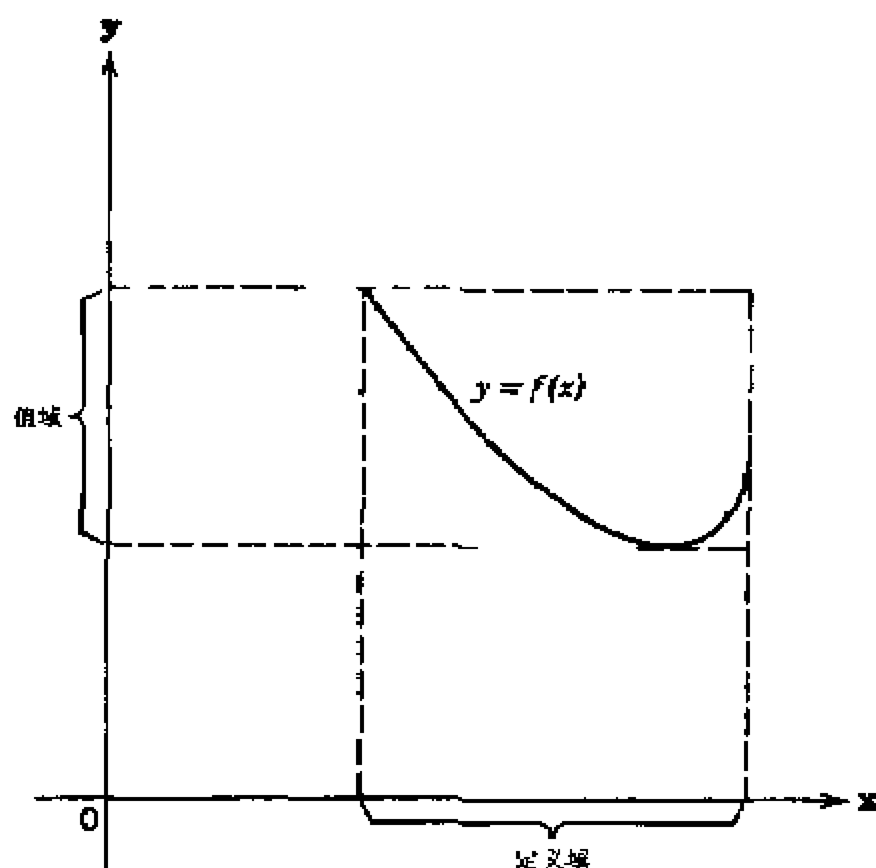


图 1.10　用图形表示的函数的定义域和值域

有时还写为 $y = y(x)$ 用以表示 y 依赖于 x[1]　例如，如果 $f(x)$ 是由表达式 x^2+1 来定义的，则有 $f(3)=3^2+1=10, f(-1)=(-1)^2+1=2$.

函数关系的性质

在函数 $f(x)$ 的一般定义中，一点也未说到当给定自变量的值时求因变量所依据的函数关系的性质. 不过如前所述，函数常常是用如 $f(x)=x^2+1$ 或 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}$ 这样一个简单的表达式以"封闭形式"给出的. 在早期的微积分中，数学家们所说的函数多半指的就是这样一些明显的表达式. 机械装置的运动常常会产生各种几何曲线或几何图形，而这些曲线和图形就确定了一些函数. 摆线，即沿 x 轴滚动的圆上的一个固定点所描绘的曲线便是一个

1) 采用这种写法时，我们想要强调的是函数本身为变量，而不是用 f 这样的符号明显地表示出该函数的运算. 对于把 x 映射为 y 的函数 f, 有时会用到下列写法.

$$f\quad x\quad \to y.$$

著名的例子（见图 1.11）. 摆线的函数解析表达式，将在第二分册中给出.

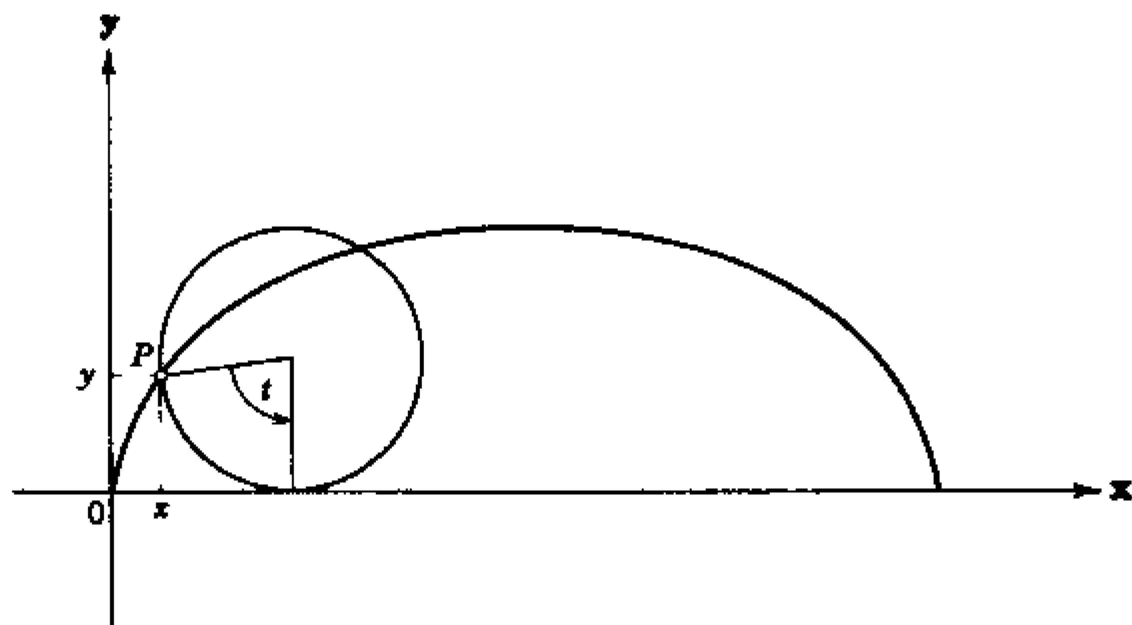


图 1.11

从逻辑上看，我们并不局限于这种由几何方式或机械方式所产生的函数. 只要对于 x 的值依据某一规则就确定 y 的值，那么任何这样的规则都可以构成一个函数. 事实上，在某些理论研究中，函数概念的这种普遍性或不限定性是一个优点，然而，对于应用，特别是在微积分中，一般的函数概念不需要那么广泛. 为了使意义重大的数学分支的发展成为可能，对于 x 值而确定 y 值所依据的“任意”对应规律，必须受到根本的限制. 在前一个半世纪中，数学家们已经认识到必须用精确的术语对过于一般的函数概念，加上不可缺少的限制，以便使所得的函数确实具有人们在直觉上所期望的一些有用的性质.

函数定义域的延拓或限定

即使对于由一些明显的公式给出的函数来说，函数的任何全面的描述，都必须包括规定函数的**定义域**，认识到这一点是很重要的. 由“当 $0 < x < 2$ 时，$f(x) = x^2$”所描述的函数 f，严格地说，和由“在较大的定义域 $-2 < x < 2$ 上，$g(x) = x^2$”所给出的函数 g，并不是同样的函数，尽管 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在二者均有定义的

区间 $0 < x < 2$ 上取相同的值. 一般说来, 如果在函数 f 有定义之处, 函数 g 也有定义并且取相同的值, 我们就把 f 称为 g 的"限定"(或者称 g 为 f 的"延拓"). 当然, 同一个函数 f, 能够由许多不同的函数经过限定来产生. 在刚才讲到的例子中, f 也是下述函数 h 的限定: 当 $0 < x < 2$ 时, $h(x) = x^2$, 当 $-2 < x \leq 0$ 时, $h(x) = -x^2$. 事实上, 这个例子说明了与形成限定函数的过程相反的一种过程, 可以将这种过程称为"逐段相联", 这样, 我们就能够直接定义出新的函数, 即在定义域的不同部分上, 取不同的明显的函数表达式.

c. 函数的图形表示. 单调函数

解析几何的基本观念是: 对于本来由某种几何性质定义的曲线, 给出解析的表示式. 为了做到这一点, 我们通常把直角坐标之一, 譬如说 y, 看作为另一个坐标 x 的函数 $y = f(x)$, 例如, 一条抛物线由函数 $y = x^2$ 来表示, 围绕坐标原点半径为 1 的圆, 由两个函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 来表示. 在前一个例子中, 我们可以认为函数是定义在无穷区间 $-\infty < x < \infty$ 上的; 在后一个例子中, 我们则必须只限于考虑区间 $-1 \leq x \leq 1$, 因为在这个区间以外, 函数没有意义[1].

反之, 如果我们不从几何上确定的曲线出发, 而是考虑按解析方式给出的函数 $y = f(x)$, 那么通常采用直角坐标系, 就可以用图形来表示 y 对 x 的函数依赖关系 (见图 1.7). 如果对于每一个横坐标 x, 取相应的纵坐标 $y = f(x)$, 我们便得到函数的几何表示. 在函数概念上所要加的限制, 应保证其几何表示形状是一条"合理的"几何曲线. 当然, 这里所说的只是一种直观感觉, 而不是严格的数学条件. 但是, 不久我们将系统地叙述像连续性、可微性等这样一些条件, 它们将保证函数的图形是一条能够在几何上描绘出来的曲线. 如果我们承认一些所谓"病态"函数, 则情况并非如此: 例如, 对于 x 的每一个有理数值, 函数 y 的值为 1; 对于 x 的每一个无理

1) 我们通常不考虑 x 和 y 的虚数值和复数值.

数值，y 的值为 0. 这样定义的函数，对于每一个 x 值，规定了一个确定的 y 值；但是，在 x 的每一个区间上，无论这个区间多么小，y 值由 0 到 1、由 1 到 0，跳跃无限多次. 这个例子表明，一般的不加限制的函数概念，可以导出这样一些图形，这些图形我们不会把它们看成是曲线的.

多值函数

我们只考虑对于定义域中每一个 x 值取唯一的 y 值的函数 $y = f(x)$，例如：$y = x^2$ 或 $y = \sin x$. 可是，对于几何上描绘的曲线，例如对于圆 $x^2 + y^2 = 1$，可能发生这种情况：曲线的整个图形不是由一个（单值）函数给出的，而是要求几个函数来描述 —— 在圆的情况下，要求两个函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$. 对于双曲线 $y^2 - x^2 = 1$，也是这样，它是由两个函数 $y = \sqrt{1+x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1+x^2}$ 来表示的. 因此，这种曲线没有明确地规定对应的函数. 我们有时说，这种曲线是由**多值**函数表示的；这时，表示一条曲线的各个函数，称为对应于该曲线的多值函数的单值**分枝**. 为简明起见，今后我们使用"函数"一词，指的总是单值函数. 例如，符号 $\sqrt{x}$（对于 $x > 0$）总是表示平方为 x 的**非负数**.

如果一条曲线是**一个**函数的图形，则 y 轴的任何平行线同这条曲线最多相交于一个点，因为定义区间内的每一个点 x 正好对应着一个 y 值. 由两个函数表示的单位圆，同 y 轴的平行线的交点多于一个. 对应于不同单值分枝的曲线的各部分，有时彼此连接着，使得整条曲线形成一个单一的图形，例如圆（见图 1.12）；另外，曲线的各部分也可以是完全分离的，例如双曲线（见图 1.13）.

例 让我们进一步考察函数的图形表示.

(a) y 与 x 成正比，

$$y = ax.$$

其图形是通过坐标原点的一条直线（见图 1.14）.

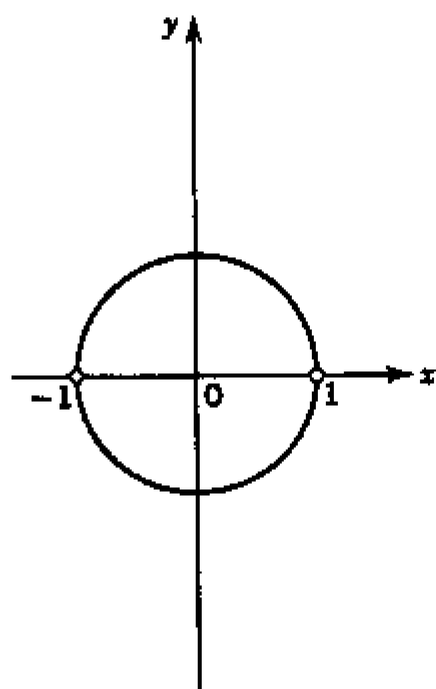


图 1 12

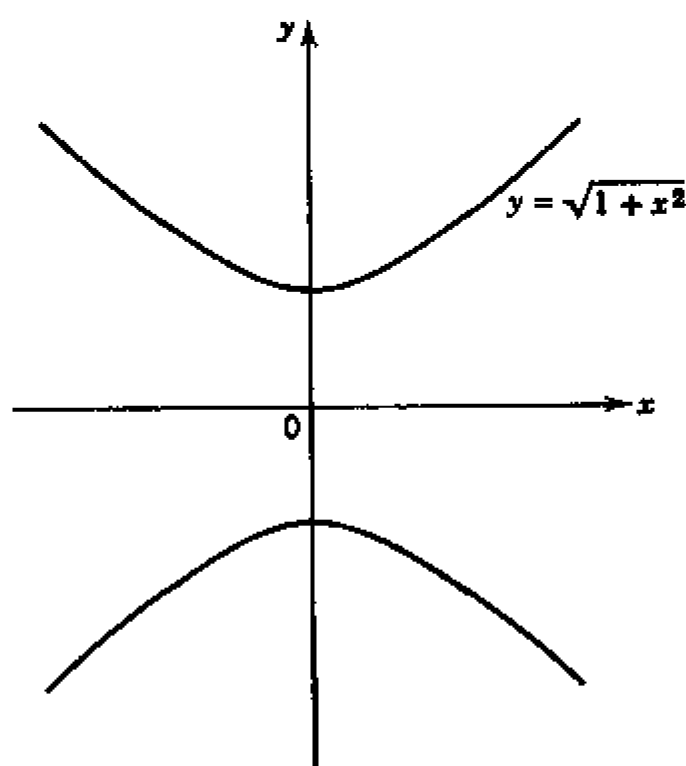


图 1 13

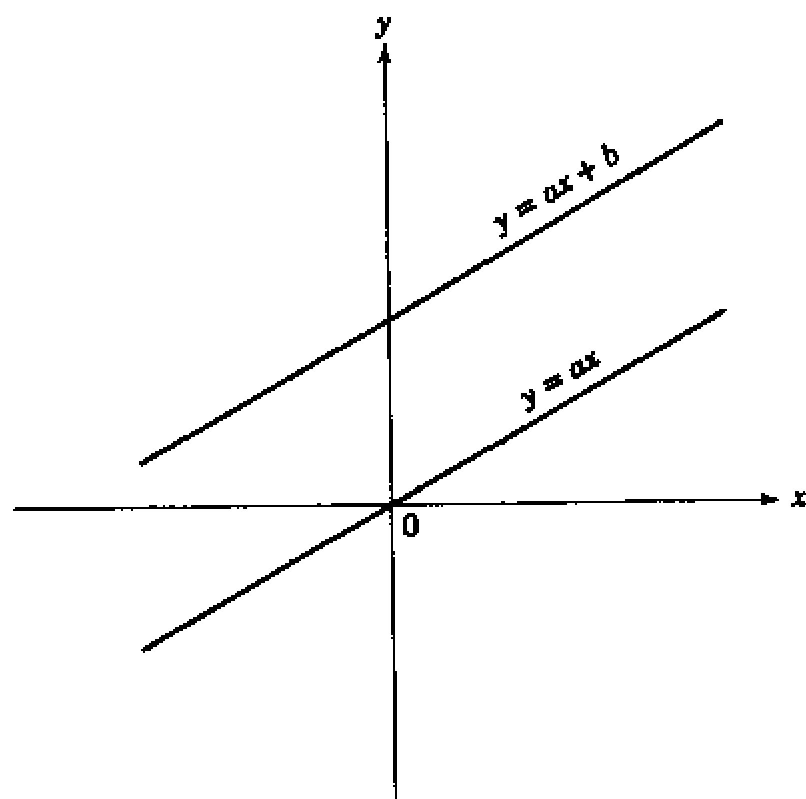


图 1 14

(b) y 是 x 的“线性函数”,

$$y \quad ax + b.$$

其图形是通过点 $x=0, y=b$ 的一条直线，其中如果 $a\neq 0$，这条直线还通过点 $x=-\frac{b}{a}, y=0$，而如果 $a=0$，则为水平线.

(c) y 与 x 成反比，

$$y=\frac{a}{x}.$$

特别是，当 $a=1$ 时

$$y=\frac{1}{x},$$

于是，当 $x=1$ 时 $y=1$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $y=2$，当 $x=2$ 时 $y=\frac{1}{2}$. 其图形是**等轴双曲线**，即关于坐标轴夹角的平分线对称的曲线（见图 1.15）.

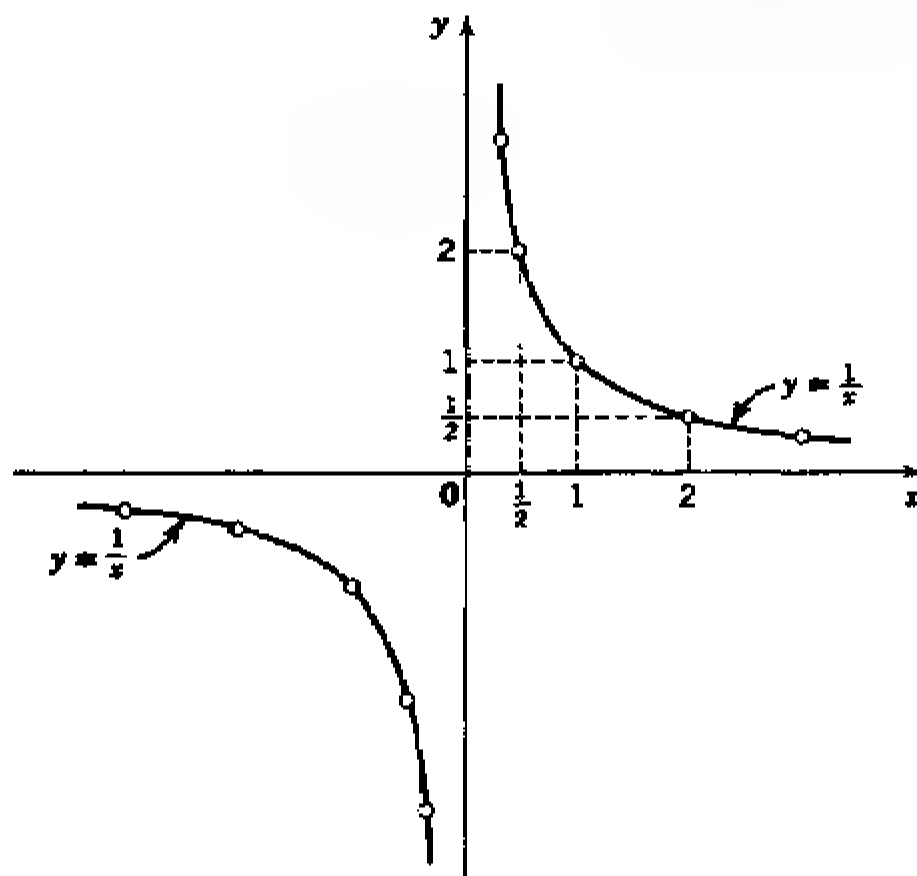


图 1.15　无穷间断性

对于数值 $x=0$，这个函数显然没有定义，因为用零除没有意义. 在这一例外的点 $x=0$ 的邻域内，函数具有任意大的值，既可为正，也可为负；这是**无穷间断性**的最简单的例子，关于间断性的概念，我们将在后面讨论（见 38 页）.

(d) y 是 x 的平方，

$$y = x^2.$$

如所周知，这个函数是由一条抛物线来表示的 (见图 1.16).

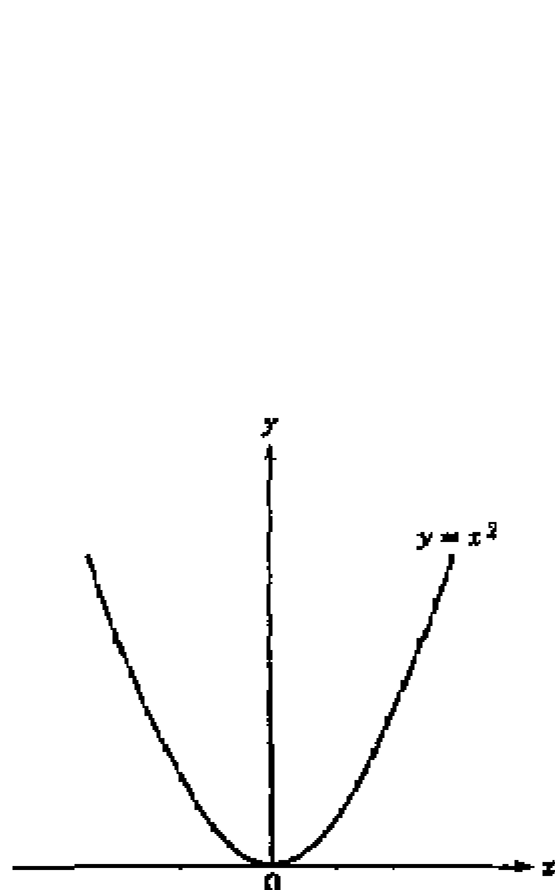


图 1.16　抛物线

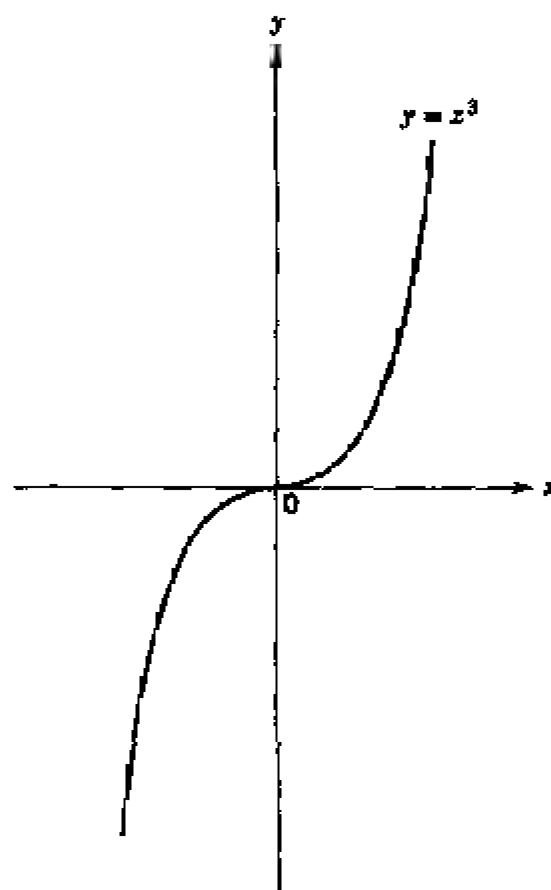


图 1.17　三次抛物线

类似地，函数 $y = x^3$ 是由所谓**立方抛物线**来表示的 (见图 1.17).

单调函数

一个函数，如果对于某一区间内的一切 x 值取相同的值 $y = a$，则称为**常数**(函数)；它在图形上是由一条水平线段来表示的. 如果一个函数，当 x 的值增加时 y 值也总是增加，即当 $x < x'$ 时，总有 $f(x) < f(x')$，则称为**单调增加函数**；反之，如果 x 值的增加总是使得 y 值减少，则此函数称为**单调减少函数**. 在图形上表示单调函数的曲线，当 x 在定义区间上按增加方向变动时，总是上升，

或者总是下降（见图 1.18）. 单调函数总是把不同的 x 值映射为不同的 y 值；也就是说，这种映射是一对一的映射.

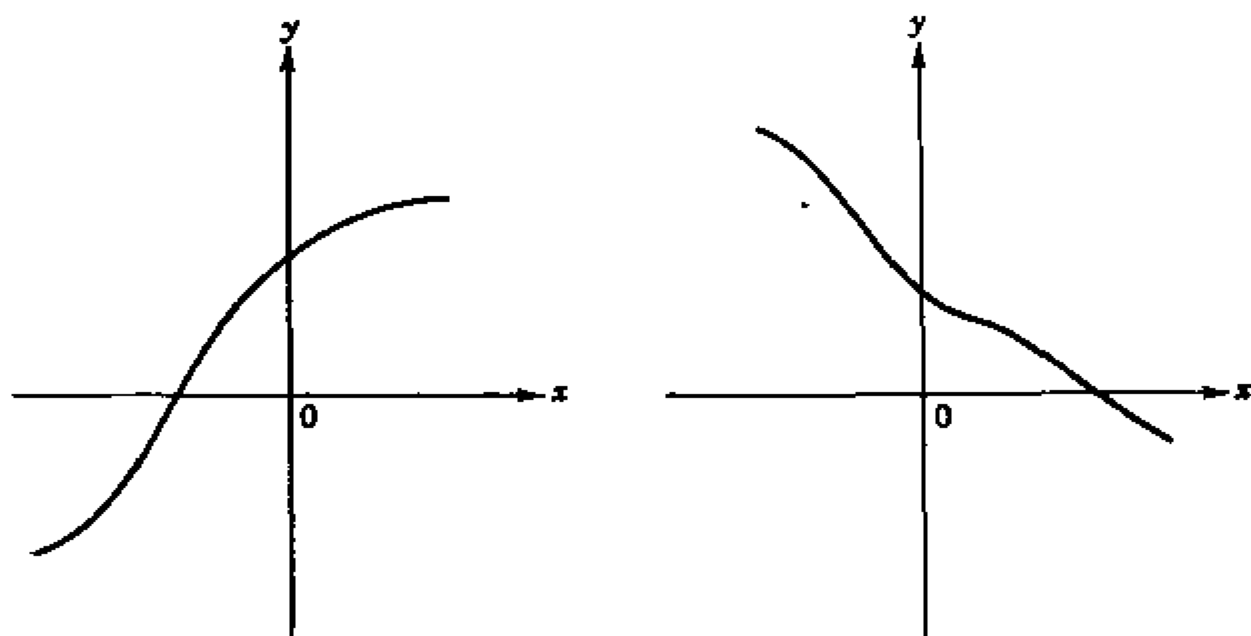


图 1.18　单调函数

偶函数和奇函数

如果由 $y=f(x)$ 表示的曲线关于 y 轴是对称的，即如果当 $x=-a$ 和 $x=a$ 时，函数取相同的值

$$f(-x)=f(x),$$

我们将此函数称为**偶函数**. 例如，函数 $y=x^2$ 是偶函数（见图 1.16）. 反之，如果曲线关于坐标原点是对称的，即如果

$$f(-x)=-f(x),$$

我们则将此函数称为**奇函数**. 例如，函数 $y=x$, $y=x^3$(见图 1.17) 和 $y=\frac{1}{x}$ (见图 1.15) 都是奇函数.

考虑一下不等式的几何表示常常是有益的. 例如，不等式 $y>x^2$ 是由抛物线 $y=x^2$ 上面的区域来表示的（图 1.19）. 中心在坐标原点的单位圆的内部，是由不等式 $x^2+y^2<1$ 来描述的（图 1.20）.

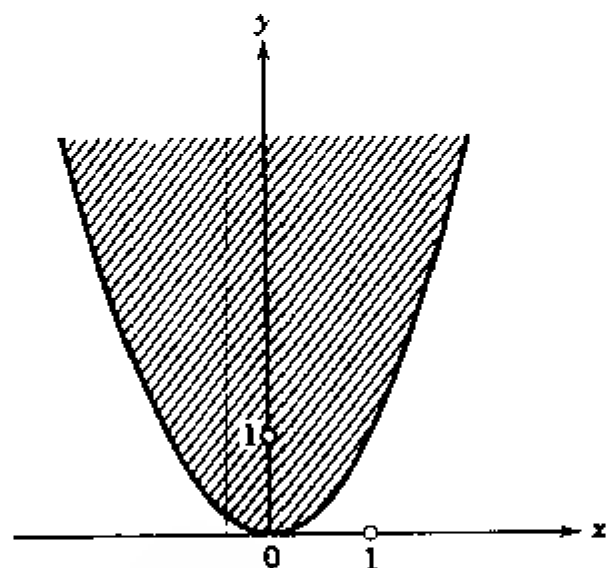


图 1.19 $y > x^2$ 的图形

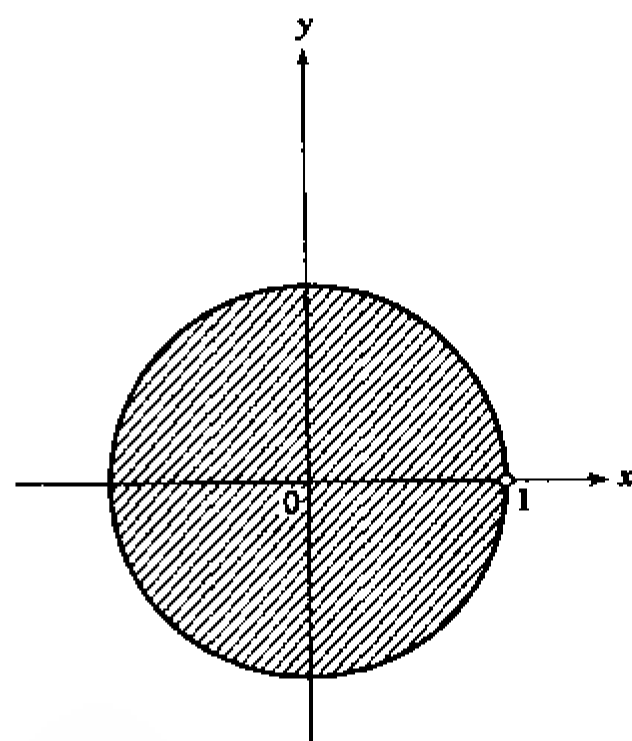


图 1.20 $x^2 + y^2 < 1$ 的图形

几个不等式常常描述出边界由不同片段组成的比较复杂的区域. 例如, 单位圆内部的"第一"象限, 由下列一组同时成立的不等式来描述:

$$x^2 + y^2 < 1, \quad x > 0, \; y > 0$$

(见图 1.21).

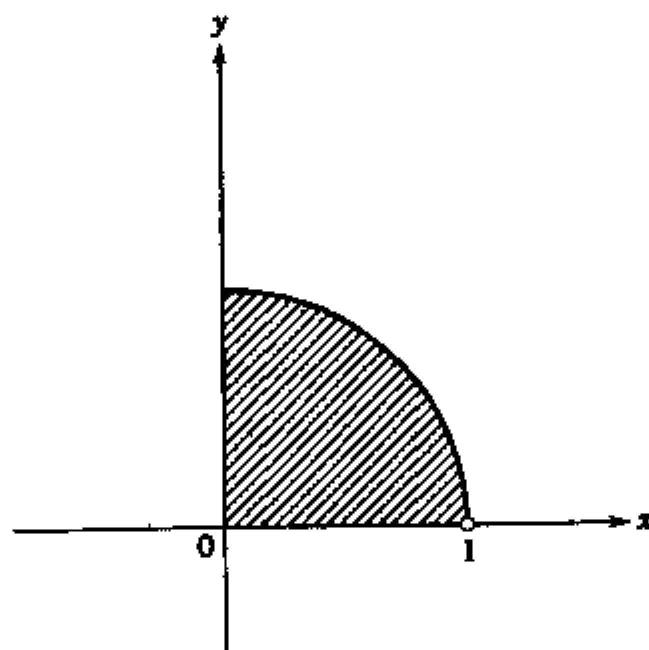


图 1.21 $x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0$ 的区域

d. 连续性

直观解释和确切表述

上面考察的函数和图形，展示了微积分中的一种最重要的性质——连续性．直观地看来，连续性指的是自变量 x 的微小变化只能引起因变量 $y = f(x)$ 的微小变化而排除了 y 值的跳跃．因此，函数的图形是由一条曲线组成的．反之，由在横坐标 x_0 处断开的两条曲线组成的图形 $y = f(x)$，就在 x_0 处出现**跳跃性间断**．例如，函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ [1]，当 $x > 0$ 时 $f(x) = +1$，当 $x < 0$ 时 $f(x) = -1$，以及 $f(0) = 0$，在 $x_0 = 0$ 处具有跳跃性间断 [2]（见图 1.22）

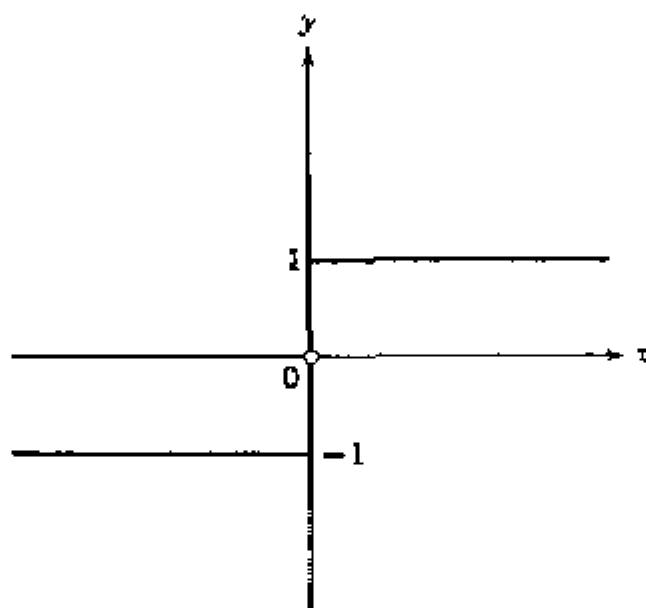


图 1.22

在初等数学的日常应用中实际上已隐含着连续性的概念．每当我们用对数表或三角函数表来描述函数 $y = f(x)$ 时，只是对于自变量 x 值的"离散"值集合，譬如说其间隔为 1/1000 或 1/100000，才能列出 y 值．但是，对于表中未列出的间隔中的 x_0 值所相应的函数值，也可能是需要的．这时我们暗中假定，表中未列出的函数

1) 读作 x 的"signum"或"sign"．

2) 在数学上，"跳跃"一词指的是一种特殊类型的间断性：函数从左、右两边趋近的数值并不都与 $f(x_0)$ 相等．$y = \frac{1}{x}$（当 $x \neq 0$ 时）和 $y = 0$（当 $x = 0$ 时）这一函数呈现出的是"无穷"间断性．还有其他类型的间断性，以后我们还要讨论．

值 $f(x_0)$，同表中出现的邻近的 x 所对应的函数值 $f(x)$ 近似相等，而且，近似的程度想多么精确就可多么精确，只需表中的 x 值彼此之间充分接近。

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性指的是：当 x 充分接近 x_0 时，$f(x)$ 同函数值 $f(x_0)$ 相差任意小．"充分接近"和"相差任意小"这两句话是不大明确的，而必须用定量的术语予以严格的表述．

我们事先指定任何一个"精确度的界限"或"容许界限"，即任一正实数 ε（无论多么小）．为了使得 f 在 x_0 具有连续性，我们要求对于足够接近 x_0 的一切 x 值（或与 x_0 在某一距离 δ 之内的一切 x 值），$f(x)$ 和 $f(x_0)$ 之差保持在这个界限之内，即 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．

如果把 f 解释为一个映射，它把 x 轴上各点 x 映射为 y 轴上的像，我们就能最容易形象地理解连续性的含意是什么．取 x 轴上的任一点 x_0 及其像 $y_0=f(x_0)$（见图 1.23）．我们在 y 轴上划出以点

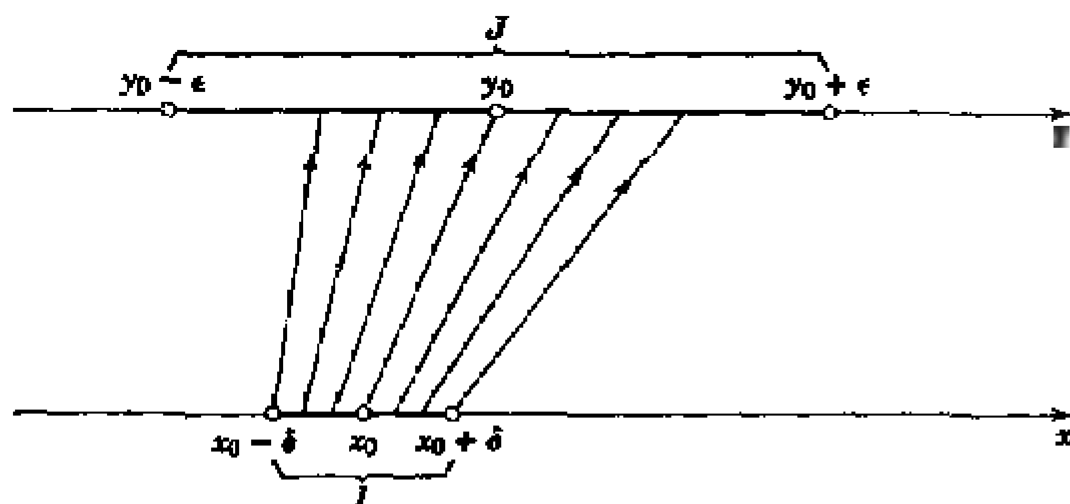


图 1.23　映射 $y=f(x)$ 在点 x_0 的连续性

y_0 为中心的任意开区间 J．如果 J 的长度为 2ε，则 J 中的各点 y 同 y_0 的距离均小于 ε，或者，对于这些点来说 $|y-y_0|<\varepsilon$．$f(x)$ 在 x_0 的连续性的条件是：一切充分接近 x_0 的点 x，其像都在 J 中；或者，能够在 x 轴上划出一个以 x_0 为中心的区间 I，譬如说区间 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，使得 I 中的每一个点 x 的像 $f(x)$ 在 J 中，因而，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．$f(x)$ 在 x_0 的连续性指的是：对于 y 轴上点 $y_0=f(x_0)$ 的任意 ε 邻域 J 来说，能够在 x 轴上找到点 x_0 的

δ 邻域 I, 使得 I 中的一切点都被映射为 J 中的点[1]. 当然，这只是对于 x 轴上使得该映射有定义的点，即属于 f 的定义域的那些点，才有意义. 于是，我们得到下述连续性的严格定义.

函数 $f(x)$ 在其定义域中的点 x_0 是连续的，如果对于每一个正数 ε，我们都能找到一个正数 δ，对定义域中满足 $|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 值不等式成立.

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

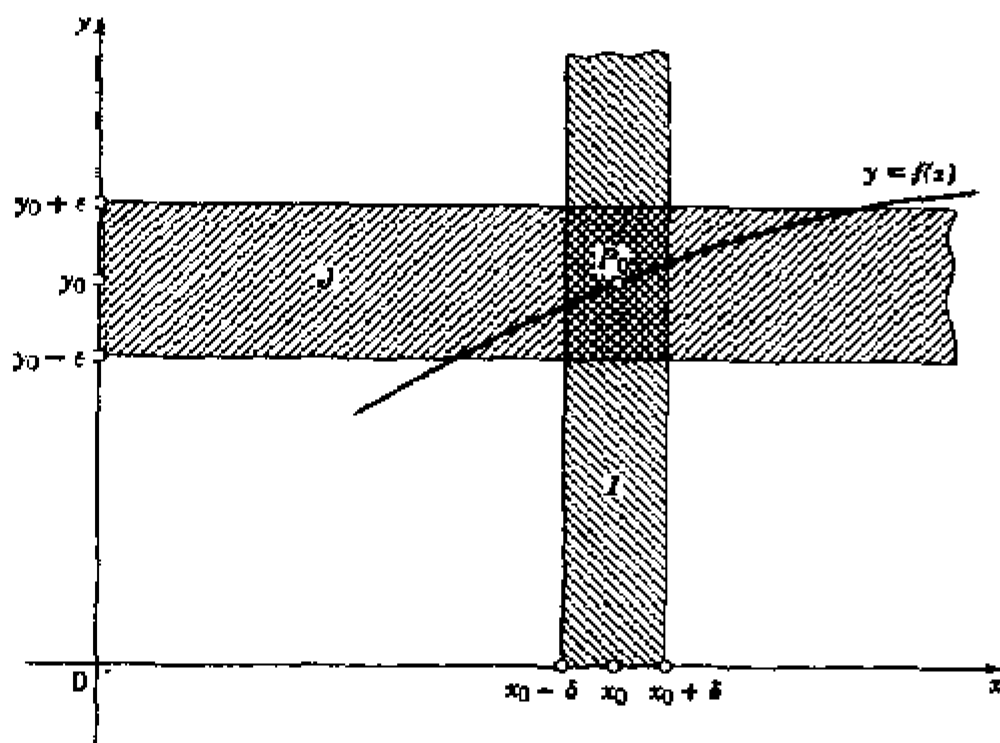


图 1.24　$y=f(x)$ 在点 x_0 的连续性

当我们用 $x-y$ 平面上的图形来表示 f 时，连续性的几何解释是很有用的 (见图 1.24). 设 $P_0=(x_0,y_0)$ 是函数图形上的一个点.

---

1) 在这个连续性的定义中，I 和 J 是两个区间，它们的中心分别在点 x_0 和 y_0. 在点 x_0 的连续性的分析定义用距离 $|x-x_0|$ 和 $|y-y_0|$ 表述是很方便的，但是，如果我们把 f 在几何上解释为一个映射，这个定义就有点不大自然了. 用另一种方式同样也可以定义 $y=f(x)$ 在点 x_0 的连续性，即要求，对于 y 轴上每一个包含点 $y_0=f(x_0)$ 的开区间 J，我们能够在 x 轴上找到一个包含点 x_0 的开区间 I，使得 I 中该映射有定义的任何一点 x 的像，都在 J 中. 这两个定义的等价性的证明留给读者，作为一个简单的练习.

这时，满足 $y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon$ 的各点 (x,y) 构成一个包含点 P_0 的水平“长条”J. f 在 x_0 的连续性指的是：给定任何一个这样的水平长条 J，无论 J 多么窄，我们都能找到一个由 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 给出的足够窄的垂直长条 I，使得处于 I 内的每一个图形上的点，也在 J 内.

作为一个例证，我们考虑线性函数 $f(x)=5x+3$；这时有

$$|f(x)-f(x_0)|=|(5x+3)-(5x_0+3)|=5|x-x_0|.$$

此式表明，映射 $y=5x+3$ 把距离**放大**到五倍. 这里，对于满足 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{5}$ 的一切 x 显然有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 因此，如果我们选取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ (当然，任何正数 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{5}$ 也都是可以选取的)，则 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性条件被满足；这时，区间 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 中任何一点的像，都在区间 $y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon$ 之中. 在这个例子里，对于“充分小的”$|x-x_0|$，距离 $|y-y_0|$ 是“任意小的”这一句话，能够赋予非常明确的意义；事实上，如果这里的 $|x-x_0|$ 不超过 $|y-y_0|$ 之值的五分之一，那么它就是**充分小的**.

函数 $f(x)=x^2$ 可以作为另一个例子. 这里，对于 $|x-x_0|<\delta$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|x^2-x_0^2|=|x-x_0|\,|2x_0+(x-x_0)|\\&\le|x-x_0|(2|x_0|+|x-x_0|)\le\delta(2|x_0|+\delta).\end{aligned}$$

于是可以立即证明，如果我们选取 $\delta=-|x_0|+\sqrt{\varepsilon+|x_0|^2}$，则满足条件 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

直观看来，连续性的概念似乎是显然的而不需要解释，但是严格的表述在开始可能会感到有点难以领会，因为要认可像“能够找到”和“任意选取”这样的一些话. 但是，最初满足于连续性的一些直观概念的读者，将会逐渐地学会理解这一分析定义在逻辑上的严格性和普遍性. 这一分析定义乃是为了把直观理解和逻辑上的透彻两方面的需要统一起来而进行长期不懈努力的结果. 归根到底，

"连续性"一词的严格意义是不可缺少的；这里所给出的分析定义，便是对函数的一种重要性质的必不可少的表述.

对于初学者来说，还应强调指出："小"并不是一个数的绝对指标；而"任意小"这一术语指的却是这样一个数，这个数开始时并不固定而可以取任何正值，并且为了更加逼近 $f(x_0)$ 这个数还可以相继取更小的值. "充分小"指的是数 δ，这个数必须进行调整，以便适应由另一个数 ε 事先决定的容许界限.

举例说明连续性和间断性. 我们可以通过不满足上述连续性定义的间断函数的例子来进行对比，以便进一步说明这个定义. 回顾一下第 32 页上关于函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 的简单例子. 显然，对于任何 $x_0\neq 0$，根据上述 ε,δ 的定义，这个函数是连续的，事实上，不论选定的 ε 多么小，都可取常数 $\delta=|x_0|$. 但是，当 $x_0=0$ 时，如果 ε 小于 1，则根本找不到 δ，因为对于每一个不等于零的 x，不论 x 多么接近于零，均有 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|=1>\varepsilon$.

函数 $\operatorname{sgn}x$ 一例说明在一点 ξ 间断的一种简单类型——称为**跳跃性间断**，在这种情况下，当 x 趋近于 ξ 时，$f(x)$ 从左边和从右边趋近于两个极限值，但是这两个极限值或者彼此不相等，或者不等于点 ξ 处的 f 值[1]. 于是在 $x=\xi$ 处图形出现间断. 图 1.25a 和

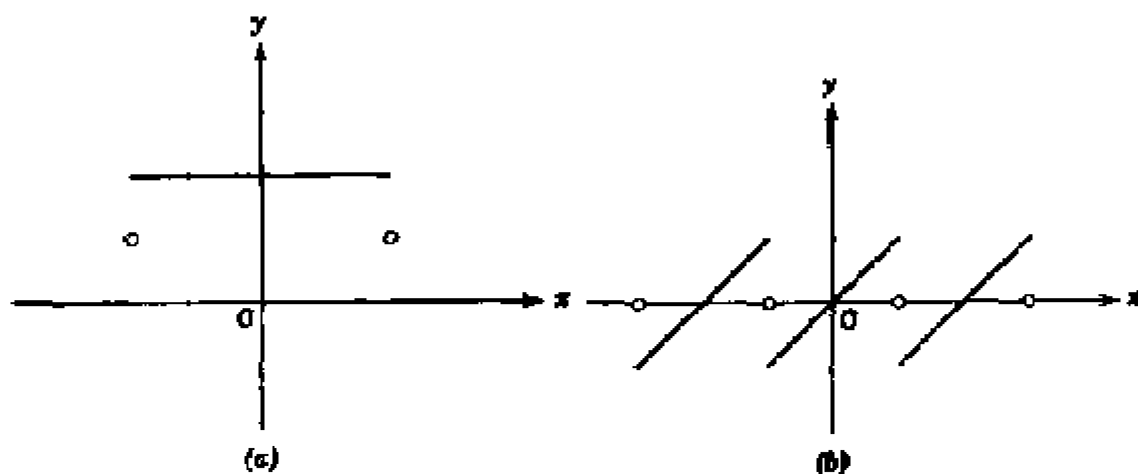


图 1.25

1) **极限**的严格定义将在 1.7 节给出. 这里对于直观概念所做的描述性的说明已经是足够的了.

b 画出了另一些具有跳跃性间断的曲线；这些函数的定义由图便可得知[1].

在这类跳跃性间断的情形中，从右边和从左边趋近的函数极限都存在. 现在，我们来考虑间断性的另一些情况. 其中最重要的是**无穷大间断性**. 这些间断性正像函数 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ 在点 $x=0$ 所显示的那样：当 $x\to 0$ 时，函数的绝对值 $|f(x)|$ 增大并超出任何界限. 当 x 从右边和从左边趋近于坐标原点时，函数 $\frac{1}{x}$ 分别取正值和负值，且其增大的数值超出了任何界限. 另一方面，函数 $\frac{1}{x^2}$ 在点 $x=0$ 具有无穷间断性，当 x 从两边趋近于坐标原点时，函数值增大超出了任何正的界限 (见图 1.26 和图 1.27). 图 1.27 所表示的函数 $\frac{1}{x^2-1}$，在 $x=1$ 和 $x=-1$ 两处都具有无穷间断性.

另一种类型的间断性是该点的左、右极限都不存在的情形. 例如图 1.28 所示的"逐段线性"偶函数 $y=f(x)$. 它定义如下：对于形如 $\pm\frac{1}{2^n}$ (其中 n 为任何整数) 的 x 值，交替取值 $+1$ 和 -1：$f(\pm\frac{1}{2^n})=(-1)^n$. 在每一个区间 $\frac{1}{2^{n+1}}<x<\frac{1}{2^n}$ 或 $-\frac{1}{2^n}<x<-\frac{1}{2^{n+1}}$ 之中，函数 $f(x)$ 是线性的，(取到 -1 和 $+1$ 之间的一切值)，因此，当 x 越来越接近点 $x=0$ 时，这个函数在 $+1$ 和 -1 二值之间越来越快地上下摆动，且在接近点 $x=0$ 的邻域内，这种摆动出现了无限多次. 光滑曲线也会呈现同样的性质 (图 1.29). [这里，$f(x)$ 实际上是由一个封闭形式的公式 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 给出的，其中正弦函数我们将在第 52 页中适当地定义.]

下述的逐段线性函数是与此相反的一个例子：此函数对于一切整数 n 取值 $f(\pm\frac{1}{2^n})=(-\frac{1}{2})^n$，而对于其间的 x 值则是线性的 (见

---

1) 在所举的这些跳跃性间断的例子中，在间断点处函数从右边和从左边趋近的极限具有不同的值. 由当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=0$，当 $x=0$ 时 $f(x)=1$ 定义的函数 $f(x)$，可作为一个浅显的例子来说明另一种跳跃性间断. 这时，由两边趋近的极限彼此相等，但是不等于间断点 ξ 上 f 的值. 于是，我们得到一个**可移去的**奇点 (通常称可去间断点，译者注). 即我们能够使得 f 在这一点上成为连续的，只须改变 f 在点 ξ 的值，使得它同由两边趋近的极限值相等.

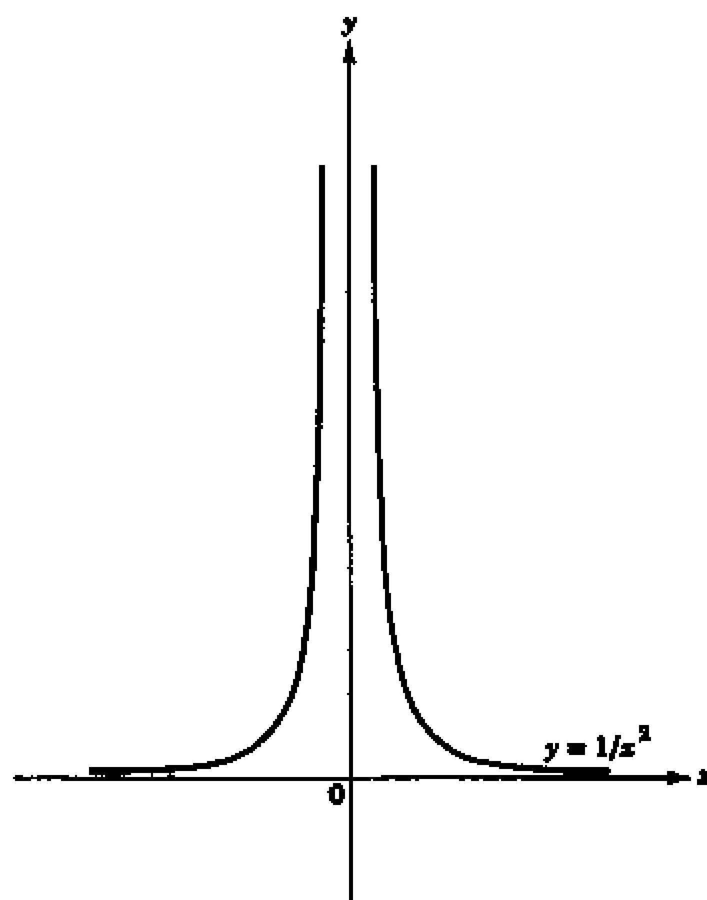


图 1.26

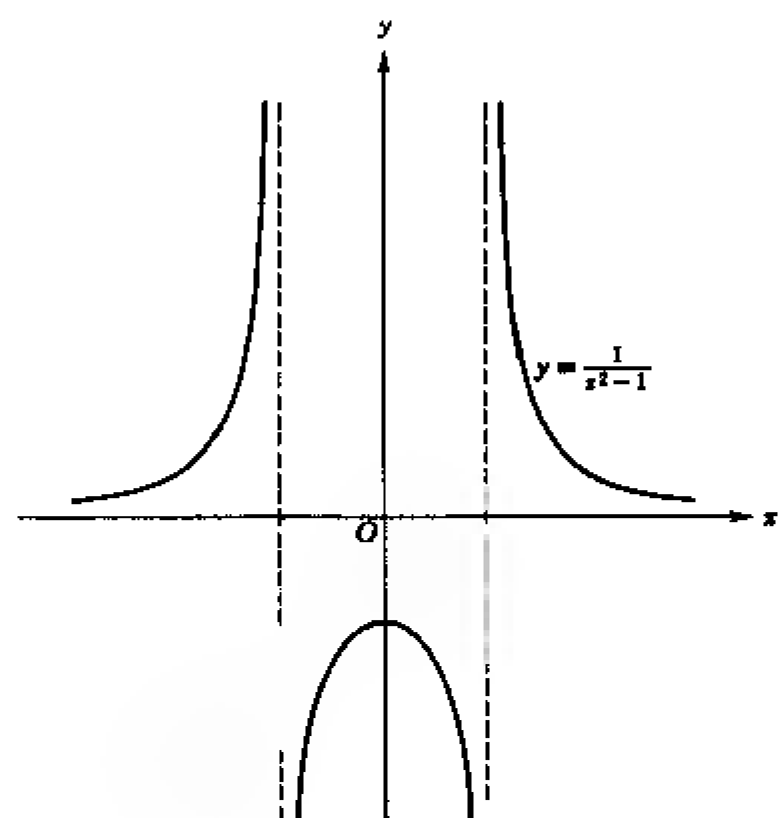


图 1 27

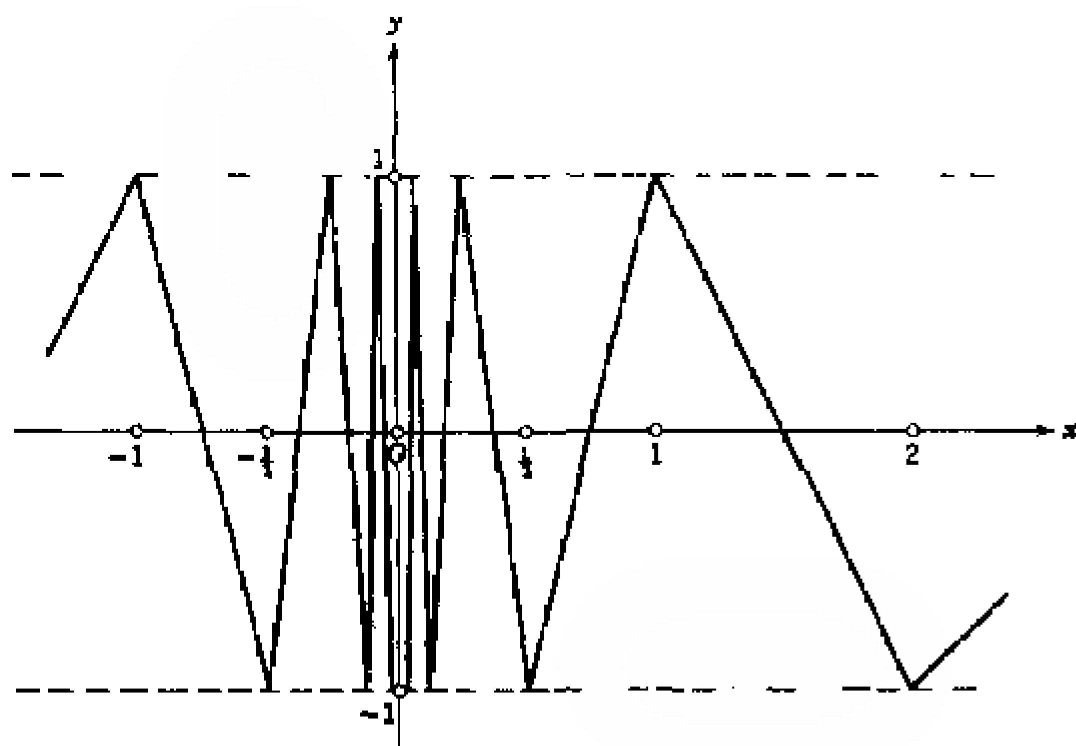


图 1.28

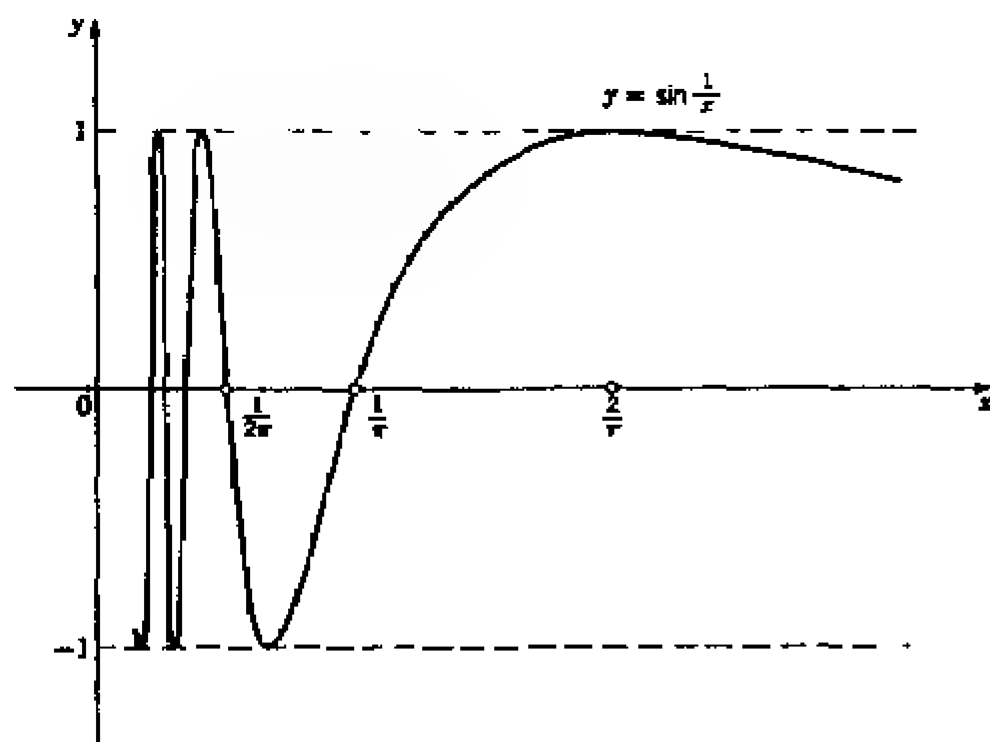


图 1.29

图 1.30). 这里，如果我们令 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的值为 0, 则 $f(x)$ 在这一点仍然是连续的. 在坐标原点的邻域内，函数上下摆动无限多次，而当 x 趋近于坐标原点时，这些摆动的振幅可为任意小. 又，对于函数 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 来说，情况相同 (见图 1.31).

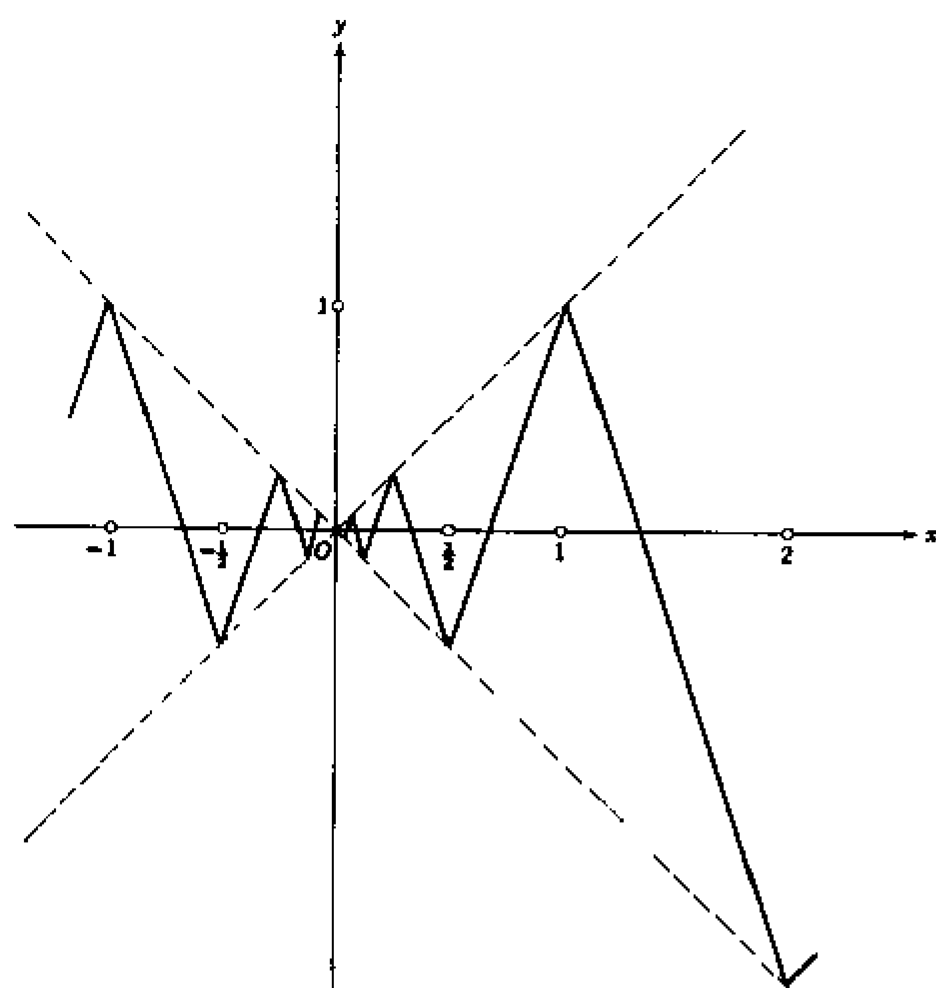


图 1.30　不连续的摆动函数

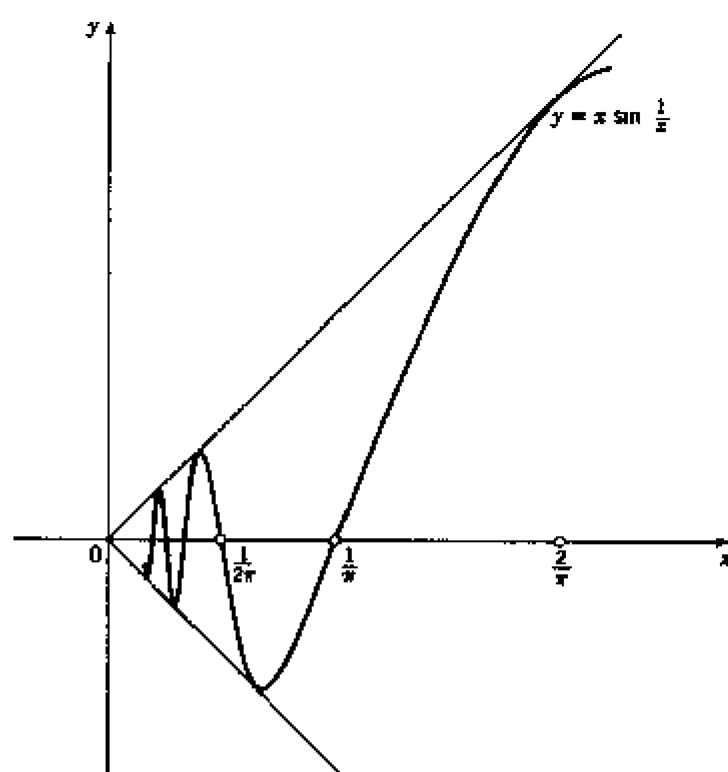


图 1.31　连续的摆动函数

这些例子表明：连续性可以有各种各样值得注意的可能性，而与我们朴素的直觉是不很相同的.

可去间断点

刚才已经指出可能会发生这种情况：在某一点，譬如说 $x=0$，函数不是按原有的规律定义的，例如上面讨论中后面一些例子. 在这样的点上如果我们规定函数取任何所希望的值，那么便可将函数的定义域随意延拓. 在最后一个例中，我们可以这样来定义，使得函数在点 $x=0$ 也是**连续**的，即当 $x=0$ 时，取 $y=0$. 事实上，只要是左极限和右极限二者都存在，并且彼此相等，我们就可以定义类似的连续延拓；此时，为了使得函数在有问题的点上成为连续的，只须令这一点上的函数值等于左、右极限. 也就是说，不论在 $x=0$ 处的定义所形成的间断性是怎样的，只要适当规定函数的值 $f(0)$，这种间断性就是"可移去的"了. 然而，对于函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 和图 1.28 中的函数，这是不可能做到的. 因为在 $x=0$ 处不论规定函数取什么值，延拓后的函数都是不连续的.

连续性的模．一致连续性

在关于函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义中，要求对每一个精确度 $\varepsilon>0$，**存在**一量 $\delta>0$(所谓连续性的模[1])，当 x 在 f 的定义域中并满足 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 连续性的模表明了 f 对 x 的变化的敏感度. 显然这样的连续模 δ 决不是唯一的；它总是能用任何更小的正值 δ' 来代替 (对于相同的 x_0 和 ε)，因为当 $|x-x_0|<\delta'$ 时也一定有 $|x-x_0|<\delta$，所以 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 对于各种实际目的，如在数值计算中，我们所关心的可能是 δ 的特定选择，例如，δ 的最大值. 但另一方面，如果我们仅仅想要证实 f 在 x_0 是连续的这一事实，那么只须对于每一个正的 ε 找出任何一个连续模即可.

如前述例中所示，一般说来，这个 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 不仅依赖于 ε，而且还依赖于 x_0 的值. 当然，我们不必考虑所有的正值 ε，而总可以

1) 以下简称连续模. ——译者注

只限于考虑充分小的 ε，譬如说 $\varepsilon < \varepsilon_0$（对于任意给定的 ε_0），因为当 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 时，我们可以就取 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 时相同的连续模. 类似地，我们只需考虑 f 的定义域中处于 x_0 的任意邻域里的点 x，譬如说，满足 $|x - x_0| < \delta_0$ 的那些点，因为，任何连续模 δ，总是可以用不超过 δ_0 的更小的一个模来代替. f 在 x_0 的连续性是一种**局部的性质**，也就是说，这种性质只同 x_0 的某个无论多么小的邻域内的 f 值有关.

我们已经看到，函数 f 对于某些点可以是连续的，而对于另一些点则可能是间断的. 如果一个函数在某个区间的每一点上都是连续的，则称此函数**在该区间上是连续的**. 这时，对于区间的每一点 x_0 来说，我们都有连续模 $\delta = \delta(\varepsilon)$，它可能随 x_0 而变化，并反映了在不同的点 x_0 附近 y 随 x 变化而变化的不同速率.

如果对于某个区间，我们能够找到**统一的**（即不依赖于区间中具体的点 x_0 的）**连续模** $\delta = \delta(\varepsilon)$，则称 f 在此区间上是**一致连续的**. 因此，如果对于每一个正数 ε，存在一个正数 δ 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，其中 x 和 x_0 是某个区间中满足 $|x - x_0| < \delta$ 的**任何两个点**，则 $f(x)$ 在此区间上是一致连续的.

对于一致连续函数 $y = f(x)$ 来说，**不论点** x **在区间中位置如何**，只要这些 x 彼此充分接近，则相应的 y 值之差为"任意小". 在某些方面，一致连续性比单纯的局部连续性更接近于直观的概念.

例如，函数 $f(x) = 5x + 3$，对于自变量的一切值来说，是一致连续的，因为当取 $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ 时，$|f(x) - f(x_0)| = 5|x - x_0| < \varepsilon$，于是 $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{5}\varepsilon$ 表示一致的连续模.

函数 $f(x) = x^2$ 在 x 的无限区间上显然不是一致连续的. 因为很清楚，只要 x 充分大，x 的微小改变能够引起 x^2 的任意大的改变. 看一看整数 x 的平方数表便可得知，当 x 增加时，相继的平方数间隔越来越大. 但是，如果我们只考虑属于固定的有限闭区间 $[a, b]$ 的各对点 x, x_0 值，则可找到一致的连续模. 事实上，当

$|x - x_0| < \delta$ 时，我们有

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$$
$$\leq 2|x - x_0|(|b| + |a|) < 2\delta(|b| + |a|) = \varepsilon,$$

如果取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(|b| + |a|)}$.

对于函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$（当 $x \neq 0$ 时），$f(0) = 0$，也会出现同样的情况．让我们考虑使得此函数在其中处处连续的有界闭区间 $a \leq x \leq b$．这样的区间不能包含坐标原点，因为坐标原点是间断点，因此 a 和 b 必须具有相同的符号．假设 a 和 b 都是正值．那么，对于属于此区间并满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 x 和 x_0，我们有

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = |x - x_0| \frac{1}{|x_0||x|} < \frac{\delta}{a^2} = \varepsilon,$$

如果取 $\delta = a^2\varepsilon$．所以，此函数在区间 $[a, b]$ 上是一致连续的．当然，这也同时证明了函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 对于每一个点 $x_0 > 0$ 来说是连续的．因为，每一个这样的点 x_0 都能被包含在某个区间 $a < x_0 < b$ 之中，a, b 均为正数．如果我们将 x 限制在一个属于此区间中的 x_0 的邻域内，则表达式 $\delta = a^2\varepsilon$ 是函数在 x_0 的连续模．

上述各例中的连续函数，在定义域中的任何有界闭区间上是连续的．实际上，它表明了一个普遍事实[1]：

任何函数，如果在一个有界闭区间上是连续的，自然在此区间上是一致连续的．

正如上述函数 x^2 的例子所表明的，区间**有界**这个限制是不可缺少的．同样，我们必须规定区间是**闭的**；例如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $0 < x < 1$ 中是连续的，但是在此区间中并不是一致连续的；只要 x 充分接近坐标原点，则 x 的任意小的改变就能引起 y 的任意大的改变．因为假如说对于区间 $(0,1)$ 来说存在一致的连续

1) 证明在补篇中（第 110 页）给出

模 $\delta(\varepsilon)$, 那么我们就可取例如 $x_0 < \delta, x = \frac{1}{2}x_0$; 显然, 只要 x_0 充分小, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{1}{x_0}$ 便大于任何预先指定的 ε, 结果就与存在着一致的 $\delta(\varepsilon)$ 这一假设相矛盾.

利普希茨 (Lipschitz) 连续性 —— 赫尔德(Hölder)连续性

在上述关于区间 $[a,b]$ 上的一致连续函数各例中, 我们找到的是一个特别简单的连续模, 即与 ε 成正比的 $\delta(\varepsilon)$. 这一事实的最一般情况, 就是由所谓按利普希茨连续的函数 $f(x)$ 来表示的. 即对于区间 $[a,b]$ 上的一切 x_1、x_2、以及固定的值 L, 函数满足如下形式的不等式:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < L|x_2 - x_1|$$

(所谓利普希茨条件). 利普希茨连续性的含义是, 对于区间 $[a,b]$ 的任何两个不同的点构成的"差商"

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

其绝对值决不超过一个固定的有限值 L, 或者说映射 $y = f(x)$ 把 x 轴上点间的距离最多放大到 L 倍. 显然, 对于利普希茨连续的函数来说, 表达式 $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ 是连续模, 因为当 $|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{L}$ 时, $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 反之, 具有与 ε 成正比的连续模, 譬如说 $\delta(\varepsilon) = c\varepsilon$ 的任何函数, 都是利普希茨连续的, 此时 $L = \frac{1}{c}$.

在第二章中将会看到, 我们所遇到的多数函数, 除了在若干孤立点以外, 都是利普希茨连续的, 因为它们的导数在不包含这些孤立点的任何闭区间中都是有界的. 但是, 利普希茨连续性对于一致连续性来说, 只是充分条件, 而不是必要条件. $f(x) = \sqrt{x}$ (当 $x \geq 0$ 时) 和在 $x_0 = 0$ 附近给出了是一致连续函数但不是利普希茨连续函数的一个最简单的例子. 这里, 当 x 充分小时, 差商

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

变为任意大，因而不能以固定的常数 L 为界．所以不可能选取与 ε 成正比的 $\delta(\varepsilon)$，但是，对于这个函数来说，存在另外的非线性的连续模，例如 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^2$．

函数 $\sqrt{x}$ 属于称为“赫尔德连续”的一类函数，这一类函数对于在区间上的一切 x_1, x_2 满足“赫尔德条件”

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leq L|x_2-x_1|^{\alpha},$$

其中 L 和 α 是固定的常数，而这个“赫尔德指数”α 的取值限于 $0<\alpha\leq 1$．对于赫尔德指数的特定值 $\alpha=1$，则得到利普希茨连续函数．

显然，$\delta=L^{-\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ 是赫尔德连续函数 f 可能有的连续模；这里 δ 与 $\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ 成正比，而不与 ε 本身成正比．函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 是赫尔德连续的，其指数 $\alpha=\frac{1}{2}$．这一点可由不等式

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| \leq |x_2-x_1|^{\frac{1}{2}}$$

得知，因为只要注意到

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| \leq |\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}|$$

并乘以 $|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|$，便可推出．于是便得到 $\sqrt{x}$ 的连续模 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^2$，正如前面所指出的．

更一般地，分数幂 $f(x)=x^{\alpha}$（当 $0<\alpha\leq 1$ 时）是赫尔德连续的，其赫尔德指数为 α．

赫尔德连续函数，仍未将一切一致连续的函数包括无遗．我们不难建立一些连续函数的例子，对于它们来说，ε 的幂不能够作为连续模．（见第 133 页，问题 13.）

e．中间值定理．反函数

一个连续的、因而就不存在“跳跃”的函数，如果不经过所有中间的值，就不能从一个值变到另一个值，这一点在直观上是没有

疑问的. 这一事实, 可由所谓中间值定理来表达 (定理的严格证明在补篇中给出, 见第 111 页).

中间值定理 考虑在某个区间的每一点上都连续的函数 $f(x)$ 设 a 和 b 是此区间的任何两个点, 而 η 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何一个数. 则在 a 和 b 之间存在数值 ξ, 使得 $f(\xi)=\eta$.

在几何上进行解释时, 中间值定理表示: 如果连续函数 f 的图形上的两个点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 位于与 x 轴平行的线 $y=\eta$ 的两侧, 则此平行线同函数的图形相交于某一个中间点 (见图 1.32). 当然, 也可能存在多个交点. 在某些重要的情况下, 即当函数 $f(x)$ 在整个区间上单调增加或单调减少时, 只能有一个交点, 因为这时对于两个不同的 ξ 值, f 不能取相同的值 η.

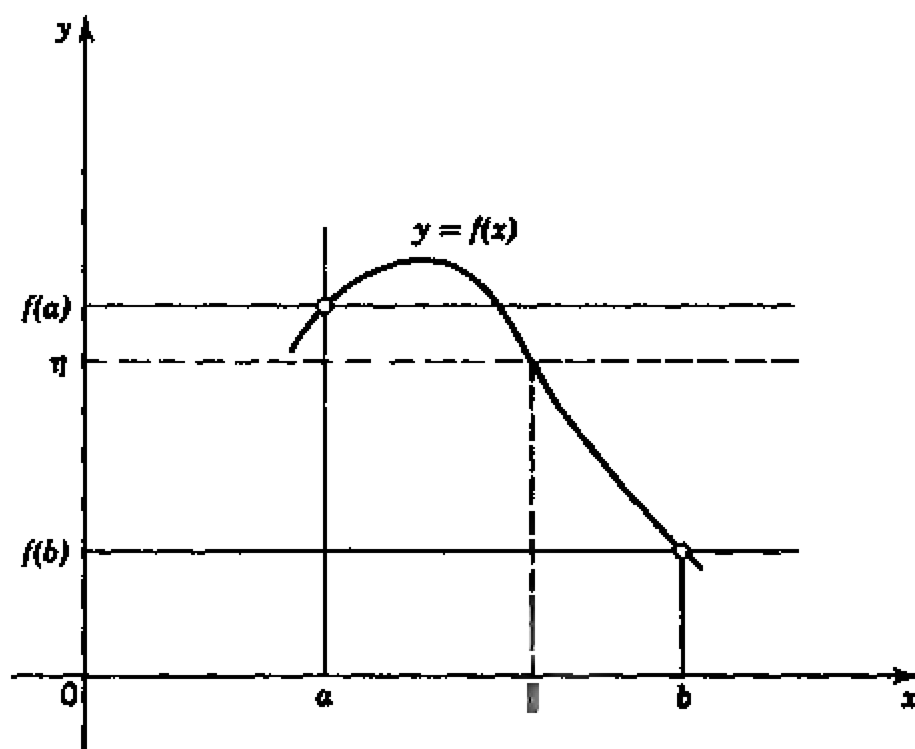


图 1.32 中间值定理

我们取函数 $f(x)=x^2$ 作为一个例子, 这个函数在区间 $1 \leq x<2$ 上是单调增加和连续的. 这里, $f(1)=1, f(2)=4$. 取 1 和 4 之间的数值 2 作为 η, 我们看出, 在 1 和 2 之间存在唯一的 ξ, 使得 $\xi^2=2$. 当然, 这个数是由 $\sqrt{2}$ 来表示的.

反函数的连续性

对于定义在区间 $a \le x \le b$ 上的任何单调增加的连续函数 $f(x)$ 来说，我们看出，对于每一个满足 $f(a) < \eta < f(b)$ 的 η，正好存在一个满足 $a < \xi \le b$ 的 ξ，使得 $f(\xi) = \eta$[1]。设 $\alpha = f(a)$，$\beta = f(b)$。因为 ξ 是由 η 唯一确定的，所以这就表示出：一个定义在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上变量为 η 的函数 $\xi = g(\eta)$。我们称这个函数 g 为 f 的**反函数**。因为较大的 ξ 对应着较大的 $\eta = f(\xi)$，所以函数 g 仍然是单调增加的。不难证明，反函数 g 也是连续的。

事实上，设 η 是 α 和 β 之间的任一值（见图 1.33）。这时，$\xi = g(\eta)$ 必然位于 $a = g(\alpha)$ 和 $b = g(\beta)$ 之间。设 ε 是给定的正数，我们可以假设 ε 是如此之小，以致 $a < \xi - \varepsilon < \xi + \varepsilon < b$。我们必须证明，对于所有充分接近 η 的 y，$|g(y) - g(\eta)| < \varepsilon$。因为 f 是增加的，所以 $\eta = f(\xi)$ 位于 $f(\xi - \varepsilon) = A$ 和 $f(\xi + \varepsilon) = B$ 两值之间，于是我们能够找到如此之小的 δ，使得

$$A < \eta - \delta < \eta + \delta < B.$$

如果 y 是满足 $\eta - \delta < y < \eta + \delta$ 的任何值，而 $x = g(y)$，我们则有 $A < y < B$，所以 $g(A) < g(y) < g(B)$，即 $\xi - \varepsilon < g(y) < \xi + \varepsilon$，或者 $|g(y) - g(\eta)| < \varepsilon$。当 η 是 g 的定义区间的端点 α 和 β 之一时，同样的证明，稍作更动，仍可采用。

关系式 $y = f(x)$ 和 $x = g(y)$ 是等价的，并且在 x, y 平面上是由同样的图形来表示的；在 x, y 平面上满足 $y = f(x)$ 的点 (x, y)，和那些满足 $x = g(y)$ 的点是同样的。如果按通常习惯的方式将函数 g 表示为 $y = g(x)$，我们则必须交换 x 和 y 的位置；这时，取 $y = f(x)$ 的图形相对于直线 $y = x$ 对称的镜象，便得到 $y = g(x)$ 的图形。例如，函数 $f(x) = x^2$（当 $x > 0$ 时）的图形，和反函数 $g(x) = \sqrt{x}$（当 $x \ge 0$ 时）的图形，便是如此（见图 1.34）。

---

1) 上述中间值定理，对于**开**区间 $f(a) < \eta < f(b)$ 中的 η，选定了 ξ。而对于 $\eta = f(a)$ 或 $\eta = f(b)$，我们当然只需取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$。

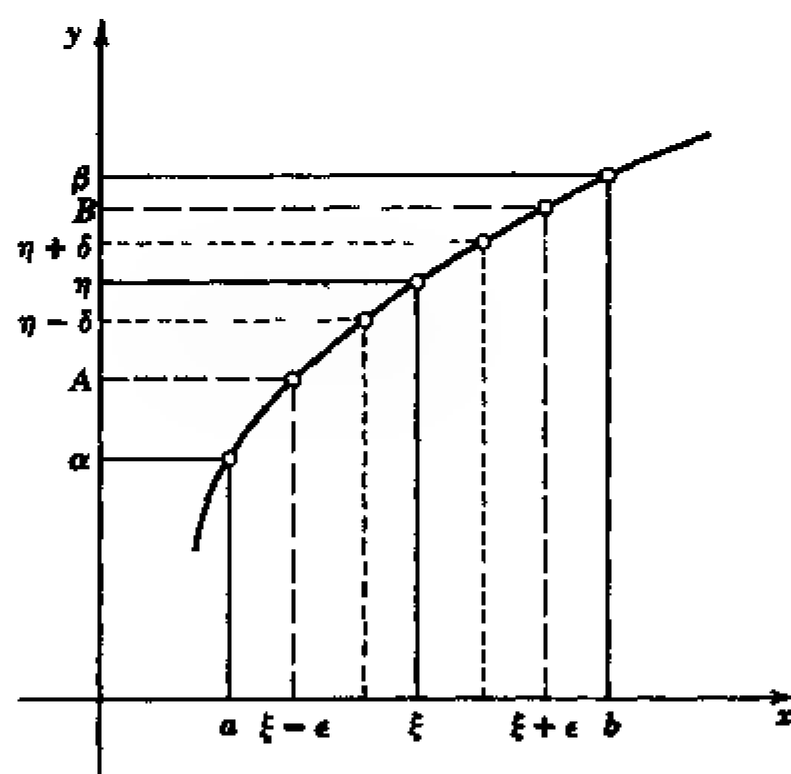


图 1 33　单调连续函数的反函数的连续性

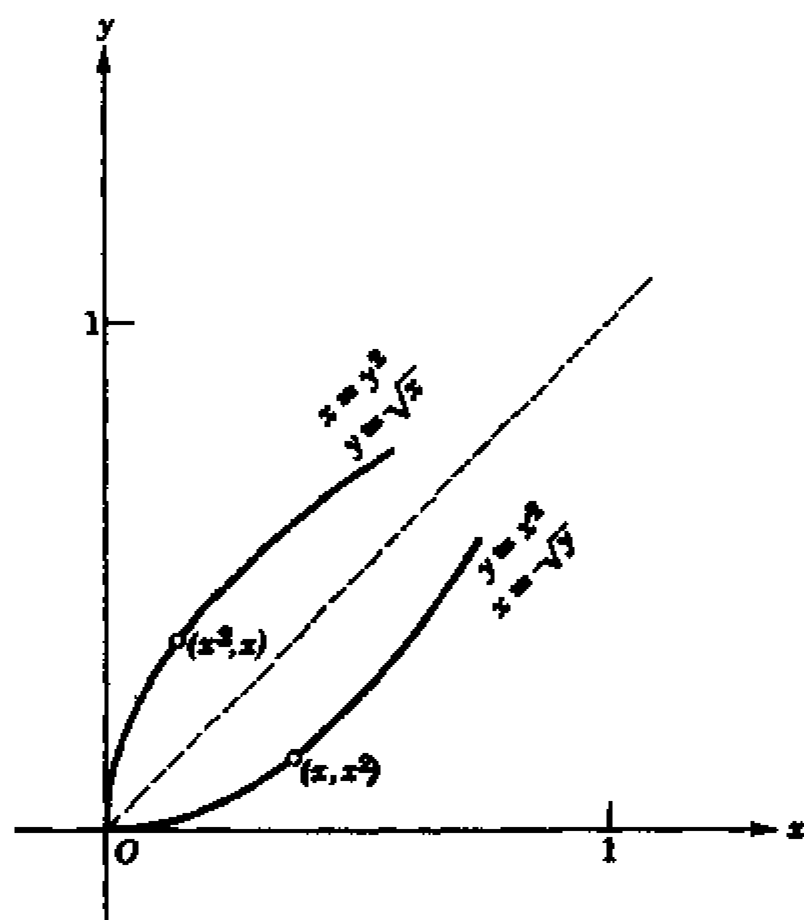


图 1 34　反函数

1.3 初等函数

a. 有理函数

现在我们来简略地回顾一下熟知的初等函数. 最简单的一类函数是通过反复进行初等运算——加法和乘法而得到的. 如果我们把这些运算用到自变量 x 和一组实数 $a_1, \cdots, a_n$ 上, 便得到**多项式**

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

多项式是数学分析中最简单的函数, 而从某种意义上来说, 也是基本的函数.

两个这样的多项式组成如下形式的商:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m},$$

就是一般的**有理函数**; 有理函数在分母不为零的所有点上都有定义.

最简单的多项式, 即**线性函数**

$$y = ax + b,$$

在图上是由一条直线来表示的. 每一个**二次函数**

$$y = ax^2 + bx + c,$$

是由一条抛物线来表示的. 三次多项式

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

的图形, 有时也称为三次抛物线, 等等.

在图 1.35 上给出了函数 $y = x^n$ 当指数 $n = 1, 2, 3, 4$ 时的图形. 当 n 为偶数时, 函数 $y = x^n$ 满足方程 $f(-x) = f(x)$, 因而是偶函数; 当 n 为奇数时, 此函数满足条件 $f(-x) = -f(x)$, 因而是奇函数.

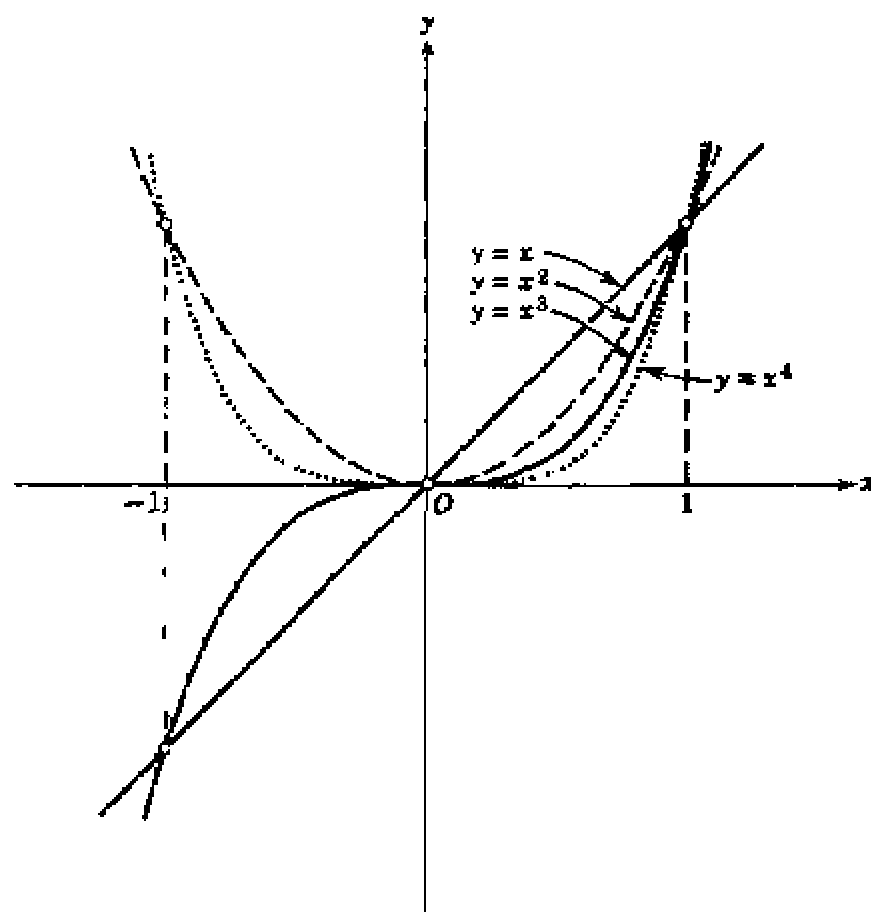


图 1.35 x 的幂

第 30 页上提到过的函数 $y=\dfrac{1}{x}$, 乃是有理函数 (除多项式外) 的最简单的例子, 其图形是等轴双曲线. 另一个例子是函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ (见图 1.26、第 40 页).

b. 代数函数

为了解决寻求有理函数的反函数问题, 我们就不得不超出有理函数集合的范围. 其典型实例是函数 $\sqrt[n]{x}$ —— x^n 的反函数. 不难看出, 当 $x\geq 0$ 时, 函数 $y=x^n$ 是单调增加的和连续的, 因此, 它具有单值的反函数, 我们用符号 $x=\sqrt[n]{y}$ 来表示, 而如果交换因变量和自变量所用的字母, 则可用符号

$$y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$$

来表示. 根据定义, 这个根总是非负的. 当 n 为奇数时, 对于所有的 x 值 (包括负值) 来说, 函数 x^n 是单调的. 因此, 当 n 为奇数

时，我们可以把 $\sqrt[n]{x}$ 的定义唯一地扩充到所有的 x 值；在这种情况下，对于负的 x 值来说，$\sqrt[n]{x}$ 是负的.

更一般地，我们可以考虑

$$y = \sqrt[n]{R(x)},$$

其中 $R(x)$ 是有理函数. 如果对一个或几个这种特殊的函数进行有理运算，则可构成更多的同类型的函数. 例如，我们可以这样来构成函数

$$y = \sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x^2+1},\quad y = x + \sqrt{x^2+1}$$

这些函数都是**代数函数**的特殊情况.（代数函数的一般概念将在第二卷中来定义.）

c. 三角函数

有理函数和代数函数是由初等运算直接定义的，而几何学则是首次产生另一些函数——所谓**超越函数**[1]各种实例的源泉. 这里，我们只考虑其中的**初等超越函数**，即三角函数、指数函数和对数函数.

在分析研究中，一个角不是用度、分和秒来度量的，而是用弧度来度量的. 我们把要度量的角的顶点，放在半径为 1 的圆的中心，而取此角所割的圆弧的长度来度量此角的大小[2]. 因此，180° 的角同 π 弧度的角是一样的（即具有 π 弧度），90° 的角具有 $\frac{\pi}{2}$ 弧度，45° 的角具有 $\frac{\pi}{4}$ 弧度，360° 的角具有 2π 弧度. 反之，1 弧度的角，如果用度数来量，则为

$$\frac{180^\circ}{\pi}，\text{或者近似于} 57^\circ 17' 45''.$$

今后，当我们说到角 x 时，指的则是弧度为 x 的角.

1) "超越"一词并非意味着任何特殊深奥与神秘，它仅仅指出这些函数的定义超出了初等运算.

2) 角的弧度也可定义为单位圆上角所对应的扇形**面积**的两倍.

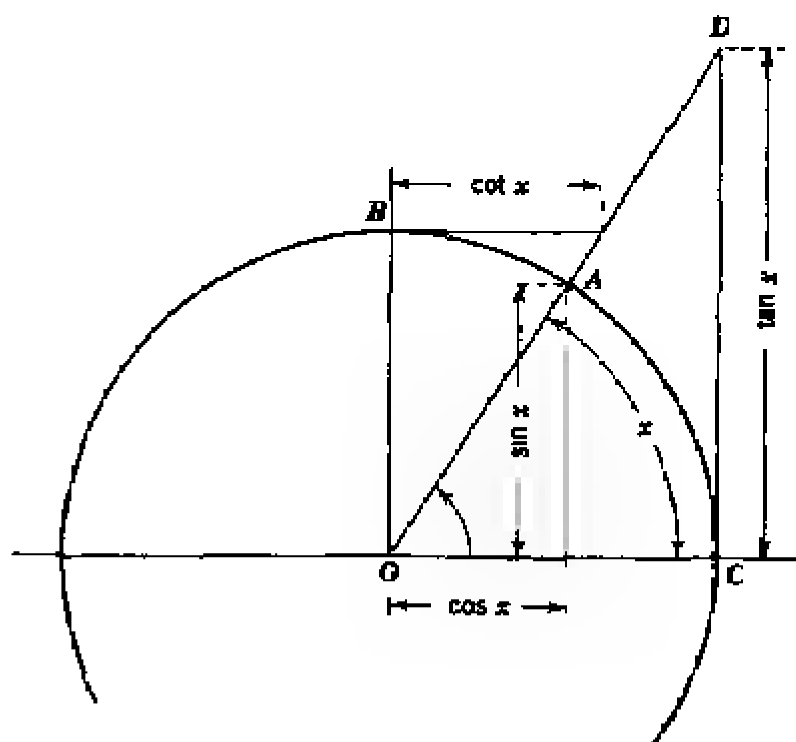


图 1.36 三角函数

我们简略地回顾一下三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 的意义[1]. 这些函数表示在图 1.36 上，其中，角 x 是从 (长度为 1 的) 线段 OC 量起的，并且认为反时针方向上的角是正的. 函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 是点 A 的两个直角坐标. 在图 1.37 和图 1.38 上，给出了函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 的图形.

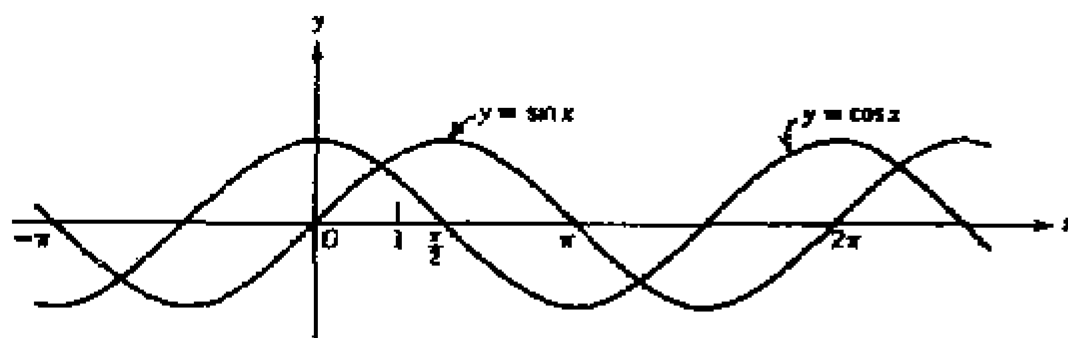


图 1.37

以后 (见第 241 页)，我们还能用分析的定义来代替几何的定义.

1) 引入函数 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$，有时也很方便

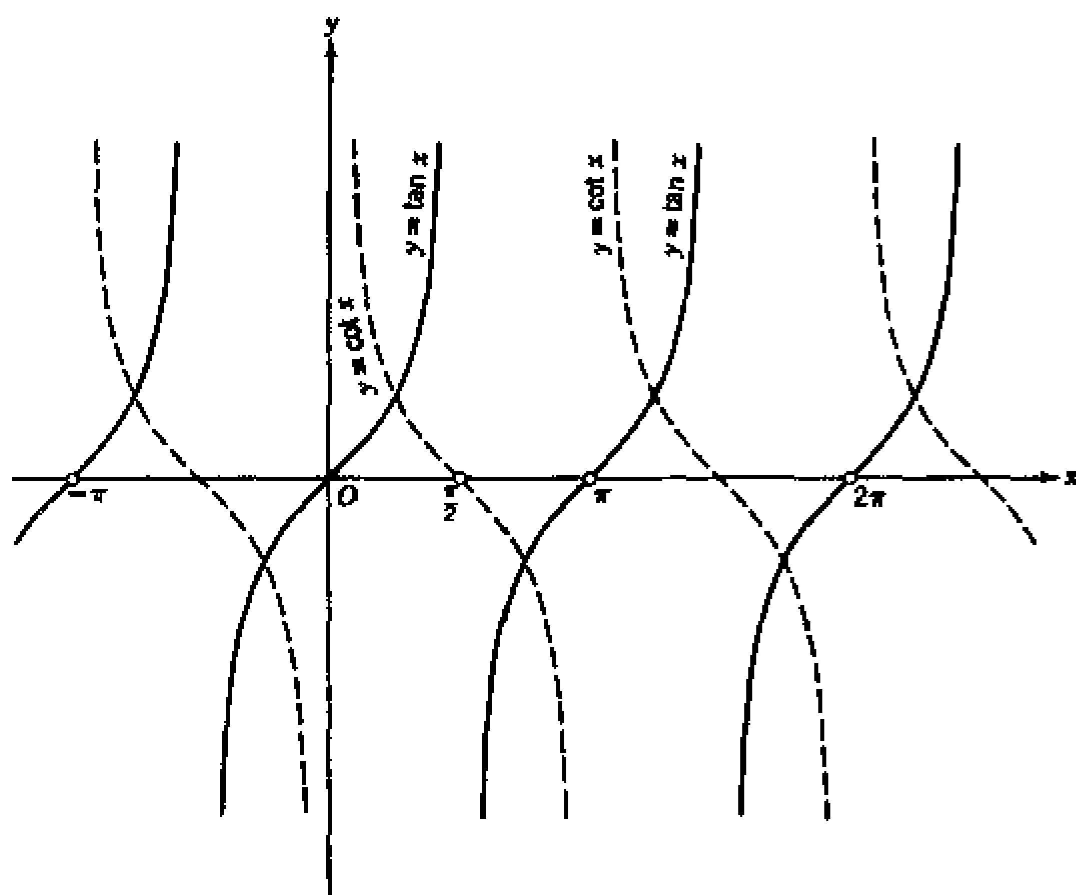


图 1.38

d. 指数函数和对数函数

除了三角函数以外，以正数 a 为底的指数函数

$$y = a^x$$

及其反函数，即以 a 为底的对数函数

$$x = \log_a y,$$

也属于初等超越函数范围. 在初等数学中，定义这些函数时所遇到的某些固有困难通常是被略去的；在这里，我们也还是要等到有了更好的定义方法以后，再来详细地讨论它们 (见 2.5 节，第 165 页). 但是，在这里我们至少可以指出定义这些函数的一种“初等”方法. 如果 $x = \frac{p}{q}$ 是有理数 (其中 p, q 均为正整数)，a 是正数，这时，我们把 a^x 定义为 $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$，按照约定，这里的根应取为正的. 因为有理数 x 是处处稠密的，自然可将此函数 a^x 的定义域扩充到无理数

上，而成为一个连续函数，即当 x 为无理数时，给 a^x，使它与 x 是有理数时已有定义的值连续．这就定义了一个连续函数 $y=a^x$ ——指数函数，对于所有 x 的有理值来说，此函数给出了前述的 a^x 的值．这样的延拓实际上是可能的，并且只能按一种方式来实现，目前我们认为这是当然的；但是必须记住，我们仍然需要**证明**情况的确如此[1]．

于是，当 $y>0$ 时，函数

$$x=\log_a y$$

可以被定义为指数函数的反函数：$x=\log_a y$ 是使得 $y=a^x$ 的数．

e．复合函数．符号积．反函数

通常构成新的函数的方法，不只是通过用有理运算来组合已知函数的途径，而还有更一般且基本的方法，即组成函数的函数或复合函数法．

设 $u=\varphi(x)$ 是一函数，其定义域为区间 $a<x<b$，其值域处于区间 $\alpha\leq u\leq\beta$ 之中．此外，设 $y=g(u)$ 是定义在 $\alpha\leq u\leq\beta$ 上的函数．这时，$g(\varphi(x))=f(x)$ 在 $a<x<b$ 上定义了函数 f，此函数是由 g 和 φ"复合的"或"组成的"函数．例如，$f(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ 是由函数 $\varphi(x)=1+x^{2n}$ 和 $g(u)=\dfrac{1}{u}$ 组成的．同样地，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 是由 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 和 $g(u)=\sin u$ 组成的．

通过**映射**来解释复合函数是有益的．映射 φ 把区间 $[a,b]$ 的每一点 x 转化为区间 $[\alpha,\beta]$ 中的点 u；映射 g 把 $[\alpha,\beta]$ 中的任一值 u 转化为点 y．映射 f 是映射 g 和 φ 的"符号积"$g\varphi$，也就是依次相继实现 φ 和 g 的映射；对于 $[a,b]$ 中的任何 x，我们在映射 φ 之下取它的像 u，然后，把 g 作用于像 $u=\varphi(x)$，使得到 $g(\varphi(x))=f(x)=y$（见图 1.39）．对于任何类型的运算来说，这样的符号积 $g\varphi$ 都是自然

1) 证明在第 174 页上．

的和富有意义的；$g\varphi$ 表示：首先进行 φ，然后对所得结果再进行 g[1]. 应注意不要把两个函数的符号积 $g\varphi = g(\varphi)$，同两个函数的普通的**代数积** $g(x)\cdot\varphi(x)$ 相混淆. 在代数积中，$g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 二者是对相同的自变量 x 构成的（即作用于相同点的映射），并且取两个函数之**值的乘积**.

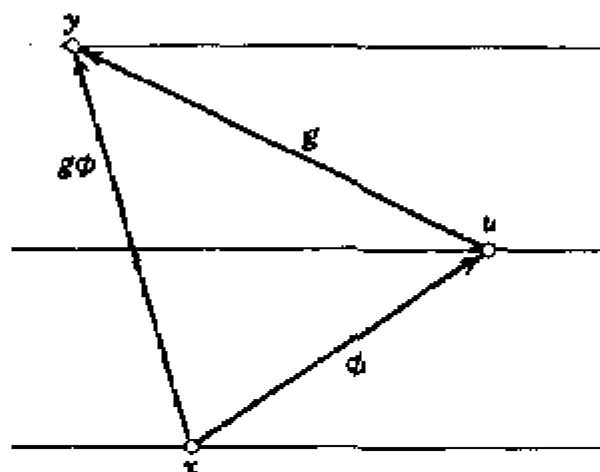


图 1.39　两个映射的符号积 $g\varphi = f$

当然，不能指望符号积一定是可交换的. 一般说来，$g(\varphi)$ 和 $\varphi(g)$ 是不同的，即使二者都有定义. 运算进行的次序是关系重大的，例如，如果 φ 代表"在某个数上加 1"的运算，而 g 代表"用 2 来乘某个数"的运算，则有

$$g(\varphi(x)) = 2(x+1) = 2x+2,$$

$$\varphi(g(x)) = (2x)+1 = 2x+1$$

（见图 1.40.）

为了能够构成两个映射的符号积 $g\varphi$."因子" g 和 φ 必须在下述意义下相互适应，即 g 的定义域必须包括 φ 的值域；例如，当

$$g(u) = \sqrt{u},\quad \varphi(x) = 1 - x^2$$

1) 符号积 $g\varphi$ 相当于**首先**进行 φ 映射，然后进行 g 映射（按**这样**的次序）. 这点初看起来似乎不大自然，但实际上是符合数学中常用的惯例的，即把函数 $f(x)$ 的自变量 x 写在函数符号 f 的**右边**. 例如，在 $\sin(\log x)$ 中，我们总是这样来理解：首先取 x 的对数，然后再取对数的正弦，而不是相反.

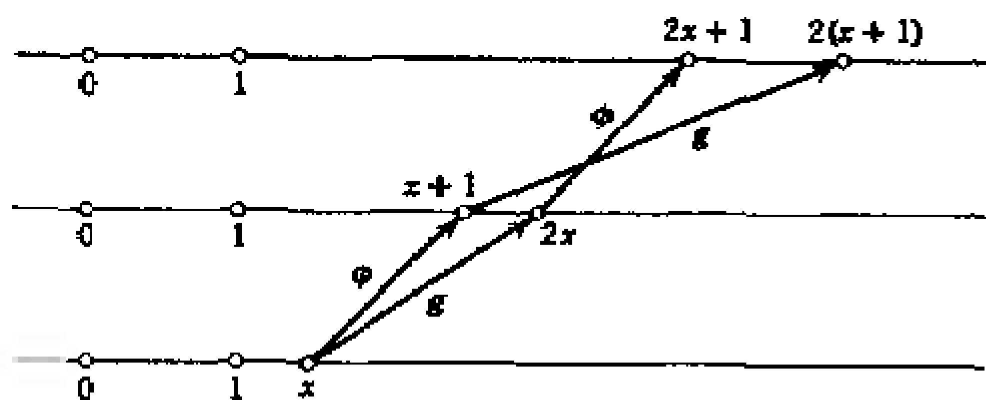


图 1.40 映射的不可交换性

时，我们就不能构成 $g\varphi$.

考虑由多次复合而成的函数是需要的. 例如，函数

$$f(x) = \sqrt{1+\tan(x^2)}$$

可以通过依次组合

$$\varphi(x) = x^2, \psi(\varphi) = 1+\tan\varphi, g(\psi) = \sqrt{\psi} = f(x)$$

而构成. 如果用符号来表示，则可写为 $f = g\psi\varphi$

反函数

如果从映射之积的角度来看，"反函数"的概念会变得更为清楚. 我们考虑映射 φ，它把 φ 定义域中的点 x 变成像 $u=\varphi(x)$，并且是把不同的 x 映射为不同的 u. 这时，映射称为"一对一"的. 于是，一个数值 u 至多是一个数值 x 的像. 我们可将 φ 值域中的每一个 u 同数值 $x = g(u)$ 联系起来 (u 是 x 在映射 φ 之下的象). 这样，我们就定义了一个映射 g，其定义域是 φ 的值域，而当此映射作用于映射 φ 的像 $u=\varphi(x)$ 时，便重新得到原来的数值 x，即 $g(\varphi(x)) = x$. 我们把 g 称为 φ 的**逆**(映射)或反函数. 这种情况可用符号方程 $g\varphi x = x$ 来表示.

恒等映射

我们定义恒等映射 I，即将每一个 x 映射到其自身的映射；如果 g 是 φ 的逆，则 $g\varphi = I$[1]. 映射 I 对符号乘法所起的作用，与

1) 更确切地说，在 φ 的定义域中，$g\varphi$ 恒同于 I

普通乘法中数 1 的作用相同：用 I 来乘，不会使映射发生改变. 因此，方程 $g\varphi = I$ 提示我们对 φ 的反函数采用记号 $g = \varphi^{-1}$. 例如，函数 $u = \sin x$ 的反函数 $x = \arcsin u$, 常常用 $x = \sin^{-1} u$ 来表示[1].

从 g 是 φ 的反函数这一定义立即可知，φ 也是 g 的反函数，因而不仅 $g(\varphi(x)) = x$, 而且还有 $\varphi(g(u)) = u$.

* 在区间 $a < x < b$ 上定义的单调函数 $u = \varphi(x)$, 显然是在此区间上定义了一个一对一的映射. 此外，如果 φ 是连续的，那么正如前面已经讲过的，从中间值定理 (第 47 页), 我们知道 φ 的值域是端点为 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 的区间. 这时，在后一区间上，φ 的反函数 g 存在，并且仍然是单调的和连续的. 实际上，**单调连续函数是具有反函数或定义一对一映射的唯一的连续函数**. 因为，假设 $u = \varphi(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，并把此区间上不同的 x 映射为不同的 u. 则特别是，数值 $\varphi(a) = \alpha$ 和 $\varphi(b) = \beta$ 是不同的. 譬如说，我们假设 $\alpha < \beta$. 这时，我们能够证明，在整个区间上 $\varphi(x)$ 是单调增加的. 因为如果不是这样，我们就能找到两个数值 c 和 d, $a \le c < d < b$, 使得 $\varphi(d) < \varphi(c)$. 如果在这里还有 $\varphi(d) > \varphi(a)$, 则由中间值定理可知：在区间 $[a, c]$ 中存在 ξ, 使得 $\varphi(\xi) = \varphi(d)$. 这个 ξ 将不同于 d, 因而这一映射就不能是一对一的. 另一方面，如果 $\varphi(d) < \varphi(a) = \alpha$, 则可得知：$\varphi(a)$ 是 $\varphi(d)$ 和 $\varphi(b)$ 之间的数值；这时在 d 和 b 之间将存在数值 ξ, 使得 $\varphi(\xi) = \varphi(a)$, 而这也同 φ 的一对一的性质相矛盾.

复合函数的一个重要的、近于明显的性质是：如果 g 和 φ 都是连续的，则 $g(\varphi(x))$ (在有定义处) 是连续的. 事实上，对于给定的正数 ϵ, 由于函数 g 的连续性，我们有

$$|f(x) - f(x_0)| = |g(\varphi(x)) - g(\varphi(x_0))| < \epsilon,$$

当 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta$ 时. 可是，因为 φ 也是连续的，所以对于满足 $|x - x_0| < \delta'$ (其中 δ' 为某一个适当的正数) 的所有 x, 必定有

1) 不要把这种写法同代数上的倒数 $\frac{1}{\sin u}$ 相混淆.

$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\delta$. 因而

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad 当 |x-x_0|<\delta' 时,$$

这就证明了 f 的连续性.

借助于这个一般定理来证明像 $\sqrt{1-x^2}$ 这样的复合函数的连续性, 要比试图直接作出此函数的连续模要容易得多.

1.4 序 列

至此, 我们已经考虑了连续变量的函数, 即其定义域是由一个或几个区间组成的. 但是, 在数学上出现许多这样的情况, 其中因变量 a 依赖于正整数 n. 这样的函数 $a(n)$, 把每一个自然数 n 同一个数值联系起来. 函数 $a(n)$ 称为序列, 特别是, 如果 n 遍及**所有的**正整数, 则称为**无穷序列**. 通常我们把序列的 "第 n 个元素" 写为 a_n, 而不写为 $a(n)$, 并且认为构成序列的元素是按下标 n 增加的次序排序的:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots.$$

这里, 可以按任何规律来规定数 a_n 对于 n 的依赖关系, 特别是, 数值 a_n 不必彼此全不相同. 序列的概念, 通过一些实例是很容易理解的.

(1) 前 n 个正整数的和

$$S(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

是 n 的函数, 并给出序列

$$1, 3, 6, 10, 15, \cdots$$

(2) 另一个简单的 n 的函数是 "n 的阶乘" 的表达式, 即前 n 个正整数之积:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n.$$

(3) 每一个大于 1 的整数，如果不是素数，则可为多于两个正整数所整除，如果是素数，则只能为其本身和 1 所整除. 我们显然可以把能整除 n 的除数的个数 $T(n)$ 看作为 n 本身的函数. 对于前几个数，此函数由下表给出：

$$n = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12$$

$$T(n) = 1\ 2\ 2\ 3\ 2\ 4\ 2\ 4\ 3\ 4\ 2\ 6$$

(4) $\pi(n)$，即小于数 n 的素数的个数，是数论中的一个非常重要的序列，对此序列的详细研究，是最引人注目的问题之一. 其主要结果是：对于大的 n 值，数 $\pi(n)$ 可以用函数 $\dfrac{n}{\log n}$ 渐近地给出[1]，这里 $\log n$ 指的是后面 (第 84 页) 将要定义的以 e 为自然基底的对数.

1.5 数学归纳法

我们在这里插入一段关于一种很重要的推理方法的讨论，许多数学思想都用到这种方法.

从数 1 开始并且从 n 向 $n+1$ 过渡，就产生了整个自然数序列，这一事实引出了带根本性的 "数学归纳法原理". 在自然科学中，我们从大量的事例出发，希望用 "经验归纳法" 去得出一个普遍成立的规律. 那么这个规律可靠的程度，取决于这种实例或 "事件" 被观察到的次数以及此规律被证实的次数. 此种归纳法是能够使人非常信服的，虽然它并不具有数学证明的逻辑可靠性.

我们使用的数学归纳法，是要对一个关于无限序列的定理，用确定的逻辑去证明其正确性. 设 A 表示与任意自然数 n 有关的命题. 例如，A 可以是这样一个命题："$n+2$ 边的简单多边形内角之和是 180° 的 n 倍" 或 $n\pi$. 为了证明这种类型的命题，用前

1) 也就是说，只要 n 充分大，数 $\pi(n)$ 用数 $\dfrac{n}{\log n}$ 来除所得之商，同 1 相差为任意小.

10 个、前 100 个甚至前 1000 个 n 值来证明它，都是不充分的. 相反，我们必须采用一种数学方法，现在首先针对此例来说明这种方法. 当 $n=1$ 时，多边形化为三角形，三角形的内角之和已知为 $180°$. 对于 $n=2$ 的四边形，我们画一条对角线，把它分为两个三角形. 这就说明，四边形内角之和等于两个三角形内角之和相加，即 $180°+180°=2\cdot180°$. 进一步考虑五边形的情况，我们画一条适当的对角线，便可把它分为一个四边形和一个三角形. 这样做的结果，就推出五边形内角之和为 $2\cdot180°+1\cdot180°=3\cdot180°$. 仿此，我们就能够依次地对于 $n=4,5$ 等等继续进行证明此一般定理. 显然命题 A 对于任何 n 的正确性，是由于它对于前一个 n 是正确的；用这种方法，便证明了命题 A 对于所有 n 普遍成立.

一般表述法

在上述实例中，证明命题 A 的实质所在，乃是依次地对于 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 这些特殊情况来证明 A. 实现这一点的可能性取决于下列两个因素：(1) 必须给出一个普遍的证明来表明：只要命题 A_r 成立，则命题 A_{r+1} 成立；(2) 必须证明命题 A_1 成立. 这两个条件足以证明所有的 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的正确性，这就构成了**数学归纳法原理**. 下面，我们把这一原理作为逻辑上的基本事实而承认其真实性.

数学归纳法原理可以用更一般的抽象形式来表述. “设 S 是由自然数组成的任何集合，具有下述两种性质：(1) 只要 S 包含数 r，则 S 也包含数 $r+1$；(2) S 包含数 1. 这时，说 S 是所有自然数的集合就是对的.”如果我们把所有使得命题 A 成立的自然数的集合取作为 S，便得到上述数学归纳法原理的那种提法.

应用数学归纳法时常常并不特别指明，或者在用到这个原理时只是以记号“etc”来表示. 在初等数学中，这种事特别常见. 但是，在比较复杂的情况下，指明应用这一原理则更为可取.

例. 下面举出两个应用例子作为说明.

首先，我们来证明前 n 个自然数平方之和的公式. 对于小的

n(譬如说 $n<5$) 经过一些试探，我们发现下列公式(用 A_n 表示)成立[1]：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

我们猜想，这个公式对于所有的 n 都成立. 为了证明，我们设 r 是使得 A_r 成立的任何一个数，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+r^2=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6},$$

在两边加上 $(r+1)^2$，我们得到

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+r^2+(r+1)^2&=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}\\&\quad+(r+1)^2=\frac{(r+1)(r+2)[2(r+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

然而，这正是用 $r+1$ 来代替 A_n 中的 n 所得到的命题 A_{r+1}. 因此，由 A_r 成立便可推出 A_{r+1} 成立. 于是，为了对于一般的 n 来完成 A_n 的证明，我们只须证实 A_1 的正确性，即

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

因为这显然是正确的，所以公式 A_n 对于所有的自然数都成立.

读者可以用类似的步骤来证明

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

作为对于数学归纳法原理的进一步说明，我们来证明

二项式定理. 此定理的命题 A_n 由下列公式来表示：

$$\begin{aligned}(a+b)^n=a^n&+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2\\&+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots\\&+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n}b^n.\end{aligned}$$

1) 顺便指出，这一结果正是希腊数学家阿基米德(Archimedes)在他关于螺旋线的著作中用过的.

在习惯上我们把这个公式写为下列形式：

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n,$$

这里，**二项式系数** $\binom{n}{k}$ 被定义为

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$k=1,2,\cdots,n-1$$

以及

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$$

(如果我们定义 $0!=1$，$\binom{n}{k}$ 的一般公式也可应用于 $k=0$ 和 $k=n$ 的情况.)

如果对于某一个 n 来说 A_n 成立，那么两边乘以 $(a+b)$，我们得到

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n}b^n\right]\\&=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^nb+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2\\&\quad+\cdots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right)\\&=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

又因为 $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$ 和 $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$. 所以我们有

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^{n}b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^{2}$$
$$+\cdots+\binom{n+1}{n}ab^{n}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

这就是公式 A_{n+1}. 又因为当 $n=1$ 时

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b,$$

所以，对于所有自然数 n 来说，二项式定理成立.

1.6 序 列 的 极 限

整个数学分析归根到底所依据的基本概念，乃是无穷序列 a_n 的**极限**概念. 数 a 常常用近似值的无穷序列 a_n 来描述，也就是说，数值 a 由 a_n 给出，如果我们把下标取得足够大，就可达到任何所希望的精确度. 当把数表示为无穷小数时，我们已经遇到过这种表示法，即**把数表示为序列的极限**; 这样，实数就表现为具有 n 位数字的普通十进位小数的序列当 n 增大时的极限. 在 1.7 节中，我们将给出关于极限概念的严格的一般论述; 在这里我们先通过一些重要的例子来说明极限的思想.

序列 $a_1, a_2, \cdots$ 由一串矩形来描绘是很方便的，其中元素 a_n 对应于 xy 平面上四周边线为 $x=n-1, x=n, y=a_n, y=0$ 而面积为 $|a_n|$ 的矩形[1]，或者与此等价地，由连续变量 x 的、在点 $x=n$ 处具有间断性跳跃的、逐段常值的函数 $a(x)$ 之图形来表示.

1) 我们当然也可以选取四周边线为 $x=n, x=n+1, y=a_n, y=0$ 的矩形来表示 a_n.

a. $a_n = \dfrac{1}{n}$

我们考虑序列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

(见图 1.41). 此序列中没有一个数为零; 但是, 当 n 无限增大时, a_n 趋向于零. 并且, 如果我们取任何一个中心在原点的区间 (无论多么小), 那么, 从某一个确定的下标开始, 以后所有的数 a_n 都将位于此区间之中. 这种情形可用一句话来表达: 当 n 增加时数 a_n **趋向于**零, 或者说数 a_n 具有**极限**零, 或者说序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ **收敛于**零.

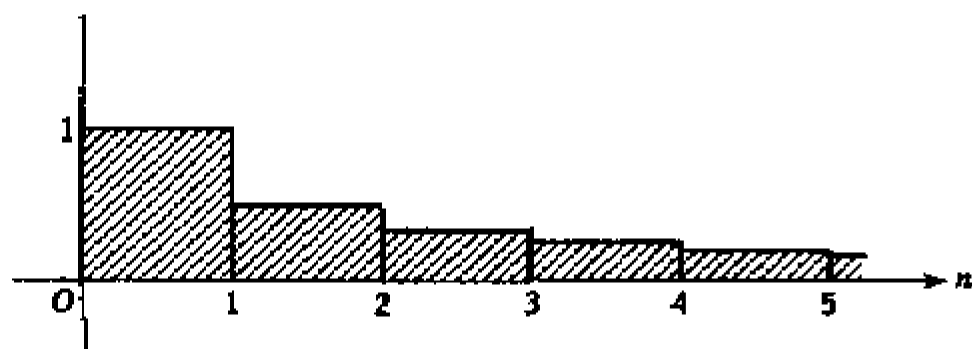


图 1.41 序列 $a_n = \dfrac{1}{n}$

如果把数表示为直线上的点, 那么上述情况就意味着: 当 n 增加时, 点 $\dfrac{1}{n}$ 越来越紧密地聚集于零点.

对于序列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

也有类似的情况 (见图 1.42). 这里, 当 n 增加时数 a_n 也趋向于零. 不同的只是数 a_n 有时大于极限零, 有时小于极限零, 于是我们说, 这个序列在极限附近**振动**.

序列收敛于零, 通常以符号形式表示为方程

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

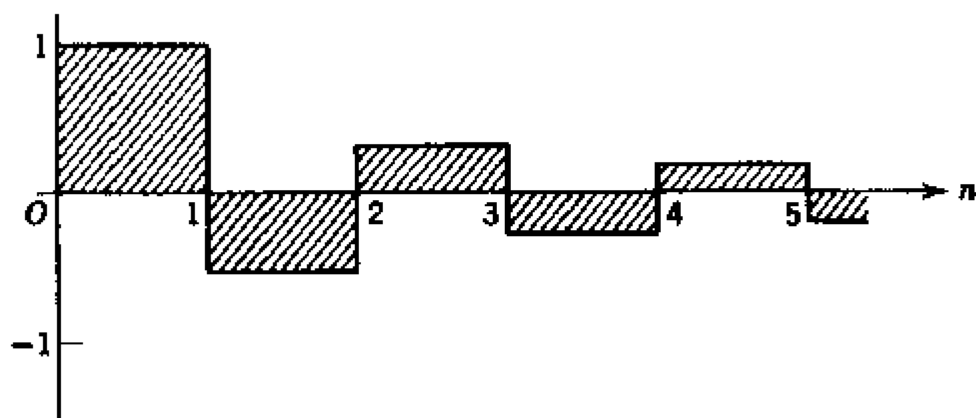


图 1.42 序列 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

有时也简略地记为

$$a_n \to 0.$$

b. $a_{2m} = \frac{1}{m}; a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$

在上面这些例子中，a_n 同极限之差的绝对值总是随 n 增加而越来越小. 但是，情况并非一定如此，正如序列

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{2m}, \frac{1}{m}, \cdots$$

所表明的 (见图 1.43); 对于偶数值 $n = 2m$, 由 $a_n = a_{2m} = \frac{1}{m}$ 给

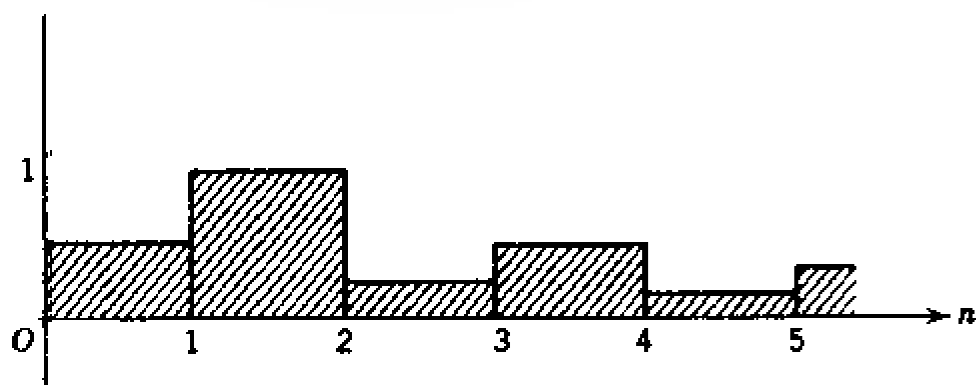


图 1.43 序列 $a_{2n} = \frac{1}{n}, a_{2n-1} = \frac{1}{2n}$

出，对于奇数值 $n = 2m - 1$, 由 $a_n = a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$ 给出. 这个序列也具有极限零，因为包括原点的每一个区间 (不论多么小)，都包含着从某一个 n 值以后的所有的数 a_n，但是并非每一个数都比前一个数更靠近极限零.

c. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

我们考虑序列

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, \cdots, a_n = \frac{n}{n+1}, \cdots$$

将 a_n 写为 $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$，我们就可看出，当 n 增加时，a_n 趋向于数 1. 其意义如下：如果我们划出包括点 1 的任何一个区间，则从某一个 a_N 以后所有的数 a_n 都必须落在这个区间之中. 我们记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

序列

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1}$$

的情况类似. 当 n 增加时，这个序列也趋向一个极限，事实上，极限是 1; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. 如果我们将 a_n 写为

$$a_n = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} = 1 - r_n,$$

则不难看出这一点. 这里只须证明：当 n 增加时，数 r_n 趋向于零. 对于所有大于 2 的 n 值，我们有 $n+2 < 2n$，而 $n^2+n+1 > n^2$. 因此，对于余项 r_n，我们有

$$0 < r_n < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \quad (n > 2),$$

由这个不等式我们看出，当 n 增加时 r_n 趋向于零. 上述讨论同时也给出了数 a_n(对于 $n > 2$) 同极限 1 之间相差的最大估值；这个差不能超过 $\dfrac{2}{n}$

这个例子还说明下述事实：对于较大的 n 值，分式 a_n 的分子和分母中含最高次幂的项起主导作用，并且决定此极限.

d. $a_n = \sqrt[n]{p}$

设 p 为任何固定的正数. 我们考虑序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, 这里

$$a_n = \sqrt[n]{p}.$$

可以断言:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

我们要用下述引理来证明这一点, 并将看到, 此引理还另有用处.

引理 如果 h 是一正数, 而 n 是一正整数, 则有

$$(1+h)^n \geq 1 + nh. \tag{1}$$

这个不等式是二项式定理 (见第 63 页) 的自然推论. 因为按照二项式定理有

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n+1)}{2}h^2 + \cdots + h^n,$$

并且我们注意到 $(1+h)^n$ 的展开式中的各项都是非负的. 同样的论证还可得到更强的不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n+1)}{2}h^2.$$

现在回到前面要研究的序列. 我们分别考虑 $p > 1$ 和 $p < 1$ 两种情况 (如果 $p = 1$, 则对于每一个 n, $\sqrt[n]{p}$ 均等于 1, 因而我们的论断显然成立).

如果 $p > 1$, 则 $\sqrt[n]{p}$ 也大于 1, 我们设 $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$, 这里 h_n 是与 n 有关的正数. 由不等式 (1), 我们有

$$p = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n,$$

这意味着

$$0 < h_n < \frac{p-1}{n}.$$

当 n 增加时，数 h_n 必定趋向于零，这就证明了 a_n 收敛于极限 1. 与此同时，我们还得到了一个估计 a_n 与极限 1 接近到怎样程度的方法，因为 a_n 同 1 之差 h_n 不大于 $\frac{p-1}{n}$.

如果 $p<1$, 则 $\frac{1}{p}>1$, 而 $\sqrt[n]{\frac{1}{p}}$ 收敛于极限 1. 然而

$$\sqrt[n]{p}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}}.$$

$\sqrt[n]{p}$ 是一个趋向于 1 的量的倒数，本身也就趋向于 1.

e. $a_n=\alpha^n$

我们考虑序列 $a_n=\alpha^n$, 这里 α 是固定数，n 遍及正整数序列.

首先，设 α 是小于 1 的正数. 于是我们令 $\alpha=\frac{1}{1+h}$, 这里 h 是正数. 不等式 (1) 给出

$$a_n=\frac{1}{(1+h)^n}\leq\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}.$$

由于 h, 因而 $\frac{1}{h}$, 仅仅依赖于 α, 当 n 增加时并不变化，所以我们可以得出，当 n 增加时 α^n 趋向于零：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0\quad(0<\alpha<1).$$

当 α 为零，或 α 为负而大于 -1 时，同样的关系式也成立. 这是十分明显的，而为在这些情况下都有 $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n=0$.

如果 $\alpha=1$, 那么 α^n 总是等于 1, 于是我们当然把数 1 认为是 α^n 的极限.

如果 $\alpha>1$, 我们则令 $\alpha=1+h$, 这里 h 是正数. 由不等式 (1) 立即可以看出，当 n 增加时，α^n 不趋向于任何确定的极限，而是不断增大并超过任何界限. 于是我们说，当 n 增加时 α^n 趋向于

无穷大，或者说，α^n**成为无穷大量**；用符号来表示，即

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty \quad (\alpha > 1).$$

我们必须明确地指出，**符号** ∞ **并不表示一个数，不能按照通常的法则对它进行运算**. 我们断言一个量是无穷大或无穷大量，其意义与讨论确定的量的论断决不相同. 尽管如此，这种表达方式和使用符号 ∞ 是极为方便的，这一点我们在下文中将会经常看到.

如果 $\alpha = -1$，则 α^n 之值不趋向于任何极限，因为当 n 遍及正整数序列时，α^n 交替取值 $+1$ 和 -1. 类似地，如果 $\alpha < -1$，α^n 之绝对值不断增大可以超过任何界限，但是其符号交替地为正和为负.

f. α^n 和 $\sqrt[n]{p}$ 的极限之几何解释

如果我们来考察函数 $y = x^n$ 和 $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ 的图形（为了方便起见，只限于 x 的非负值），则上述两个极限分别由图 1.44 和图 1.45 来说明. 我们看到，在从 0 到 1 的区间上，当 n 增加时，曲线 $y = x^n$ 越来越接近于 x 轴，而在这个区间以外，曲线越来越陡，并且趋近于平行 y 轴的一条直线. 所有这些曲线都通过坐标为 $x = 1, y = 1$ 的点和原点.

至于函数 $y = x^{\frac{1}{n}} = +\sqrt[n]{x}$ 的图形，当 n 增加时则越来越接近一条平行于 x 轴且在 x 轴上方距离为 1 的直线；这些曲线也都是通过原点和点 (1,1). 因此，在极限的情况下，这些曲线趋近于一条折线：一部分是 y 轴上原点到 1 之间的一段，另一部分是平行于 x 轴的直线 $y = 1$. 并且，这两个图形显然有着密切的联系，因为函数 $y = \sqrt[n]{x}$ 是 n 次幂 x^n 的反函数，所以，对于每一个 n，若将 $y = x^n$ 的图形对直线 $y = x$ 作镜面映象，则变为 $y = \sqrt[n]{x}$ 的图形.

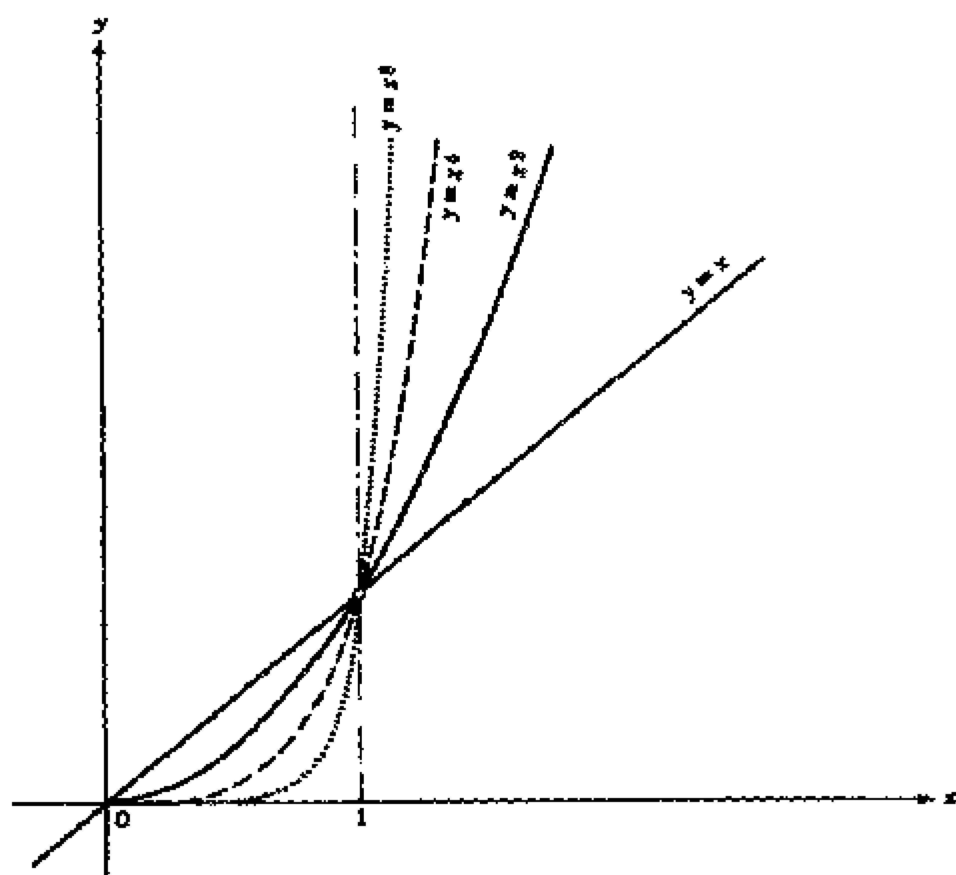


图 1.44　当 n 增加时 x^n 的图像

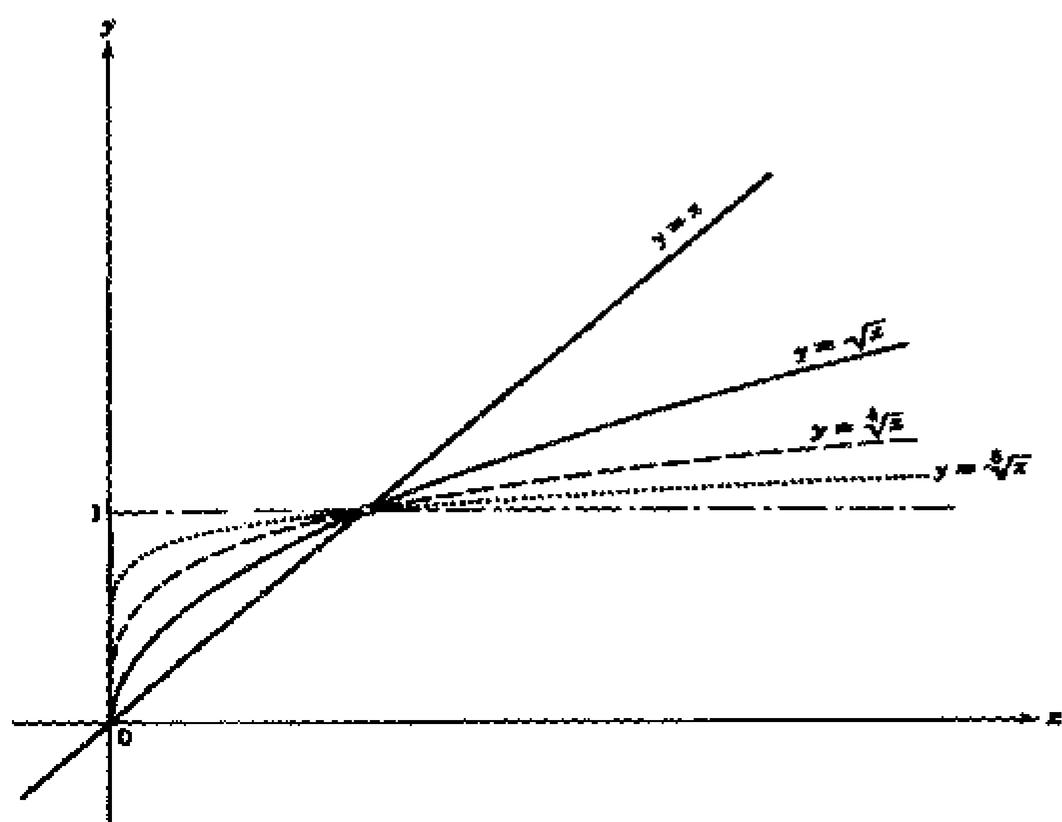


图 1.45　当 n 增加时 $x^{\frac{1}{n}}$ 的图像

g. 几何级数

初等数学中一个熟知的极限的例子，乃是（有穷）几何级数

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=S_n;$$

数 q 称为此级数的公比．如所周知，只要 $q\neq 1$，此级数的和则可表示为下列形式：

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q};$$

将和 S_n 乘以 q 并从原方程减去这样得到的方程，便可导出此表达式，也可用除法来证明这个公式．

当 n 无限增加时，级数之和 S_n 变成什么？答案是：如果 q 位于 -1 和 $+1$ 之间（不包括端点值），则和 S_n 的序列具有确定的极限 S，并且

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-q}.$$

为了证明这个结论，我们将和 S_n 写为 $(1-q^n)/(1-q)=1/(1-q)-q^n/(1-q)$．我们已经证明，如果 $|q|<1$，则当 n 增加时，量 q^n 趋向于零；因此，在这个假设之下，当 n 增加时，$q^n/(1-q)$ 也趋向于零，而 S_n 趋向于极限 $1/(1-q)$．

极限式 $\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=1/(1-q)$，通常用这样一句话来叙述：当 $|q|<1$ 时，无穷几何级数（简称几何级数）之和是表达式 $1/(1-q)$．

有穷几何级数之和 S_n 也称为相应几何级数 $1+q+q^2+\cdots$ 的部分和（我们应注意将数列 q^n 同几何级数的部分和区分开来）．

当 n 增加时，几何级数的部分和 S_n 趋向于极限 $S=1/(1-q)$ 这一事实也可用一句话来表述：无穷级数 $1+q+q^2+\cdots$，当 $|q|<1$ 时，收敛于和 $S=1/(1-q)$．

顺便指出，如果 q 是有理数，例如 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=\frac{1}{3}$，则几何级数之和具有有理数值（在所指出的这两种情况下，级数之和分别是

2 和 3/2). 这一点乃是下述熟知事实的依据：**循环小数总是表示有理数**[1]. 这个事实的一般证明，通过一个例子即可看出：例如数

$$x = 0.343434\cdots$$

可以这样来求值：

$$\begin{aligned} x &= \frac{34}{10^2} + \frac{34}{10^4} + \frac{34}{10^6} + \cdots \\ &= \frac{34}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) \\ &= \frac{34}{100} \times \frac{1}{1 - 1/100} = \frac{34}{99}. \end{aligned}$$

h. $a_n = \sqrt[n]{n}$

我们来证明序列

$$a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt[3]{3}, \cdots, a_n = \sqrt[n]{n}, \cdots$$

当 n 增加时趋向于 1：

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

因为 a_n 大于 1, 所以我们设 $a_n = 1 + h_n$, 这里 h_n 为正数. 于是 (见第 71 页)

$$\begin{aligned} n = (a_n)^n = (1 + h_n)^n &\geq 1 + nh_n \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2. \end{aligned}$$

由此得到，对于 $n > 1$,

$$h_n^2 < \frac{2}{n-1};$$

因此

$$h_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

---

1) 见 Courant 和 Robbins, What Is Mathematics? p. 66.

于是我们有

$$1 \leq a_n = 1 + h_n \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

这个不等式的右端显然趋向于 1，因此 a_n 也趋向于 1

i. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

在这个例子中 a_n 是两项之差，其中每一项都不断增加而超过一切界限．如果试图分别对每一项取极限，我们则得到无意义的符号表达式 $\infty - \infty$．在这种场合，极限是否存在，以及极限值是什么，完全取决于特定的情况．在这个例子中，我们断言：

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

为了证明，我们只需将 a_n 的表达式改写为下列形式：

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

立即可以看出，当 n 增加时它趋向于零．

j. $a_n = \frac{n}{\alpha^n}$，其中 $\alpha > 1$

形式上，a_n 的极限是例 c 中已经遇到过的不定型 $\frac{\infty}{\infty}$．现在我们来证明，在这个例子中数列 $a_n = \frac{n}{\alpha^n}$ 趋向于极限零．

为此，我们设 $\alpha = 1 + h$，这里 $h > 0$，并再次利用不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$
$$> \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

于是，对于 $n > 1$，有

$$a_n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2}.$$

因为 a_n 是正数，而这个不等式的右端趋向于零，所以 a_n 也必须趋向于零.

1.7 再论极限概念

a. 收敛和发散的定义

从 1.6 节讨论的那些实例，我们抽象出下述一般的极限概念：

假设对于给定的无穷点列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，存在一个数 l，使得每一个包含点 l 的开区间（无论多么小），都包含着除去最多为有限个点以外的所有的点 a_n. 这时，数 l 称为序列 $a_1, a_2, \cdots$ 的极限，或者我们说，序列 $a_1, a_2, \cdots$ 是收敛的并且收敛于 l，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

下述的极限定义是与此等价的：

对于任何正数 ε（无论多么小），我们都能找到足够大的整数 $N = N(\varepsilon)$，使得从下标 N 以后[也就是说，对于 $n > N(\varepsilon)$]，总有 $|a_n - l| < \varepsilon$

当然，作为一般的规律，容许界限 ε 之值越小，$N(\varepsilon)$ 必须选得越来越大；换句话说，当 ε 趋向于零时，$N(\varepsilon)$ 通常将要无限地增大. 关于极限的这种笼统而直观的概念，使我们想象到 a_n 将变得越来越靠近于 l. 这一图象在这里可由下述严格的"定性的"定义所代替：l 的任何邻域都包含着除去最多为有限个点以外的所有的点 a_n[1].

显然，序列 $a_1, a_2, \cdots$ 的极限 l 不能多于一个. 因为，如果有两个不同的数 l 和 l'，是同一序列 $a_1, a_2, \cdots$ 的极限，我们就能划出分别包含点 l 和 l' 而又不相重叠的两个开区间. 因为每一个区间都包含除有限个点之外所有的点 a_n，所以序列不能是无限的. 因此，收敛的序列的极限是唯一确定的.

---

1) 读者将会发现它与函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义之相似之处. 那里足够小的量 $\delta(\varepsilon)$ 所起的作用，就是这里足够大的数 $N(\varepsilon)$ 所起的作用. 事实上我们将在第 90 页上看到，函数在一点的连续性能够通过序列的极限来表述.

另一个明显而又有用的推论是：如果我们从收敛的序列中去掉任何一些项，则所得序列与原序列收敛于同样的极限.

一个序列，**如果不收敛**，**则称为发散的**．如果当 n 增加时，数 a_n 增大而超过任何正数，我们就说序列发散于 $+\infty$；正如前面已经提到过的，这时我们记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$．类似地，如果当 n 增加时，数 $-a_n$ 在正值方向上增大而超过任何界限，我们就记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$．但是，发散性也可按另一种方式出现，例如对于序列 $a_1 = -1, a_2 = +1, a_3 = -1, a_4 = +1, \cdots$，其各项在两个不同的数值上来回摆动.

显然，去掉有限多项，既不会影响序列的发散性，也不会影响其收敛性.

对序列 $a_1, a_2, \cdots$，如果存在一个有限区间包含其**所有**点，则称此序列为**有界的**．任何有限区间都包含在某一个以原点为中心的有限区间之中．因此，序列是有界的这一要求，指的就是存在着一个数 M，使得对于一切 n，都有 $|a_n| \le M$.

收敛的序列 $a_1, a_2, \cdots$ **必定是有界的**．因为设 l 是此序列的极限并取 $\varepsilon = 1$，我们由收敛性的定义可知，从某一个 N 以后所有的 a_n 都位于以 l 为中心、长度为 2 的区间之中．在此序列中可能位于此区间之外的那些项，只有 $a_1, \cdots, a_{N-1}$．然而，这时我们可以找到一个更大的有限区间，使得它还包含 $a_1, \cdots, a_{N-1}$.

b. 极限的有理运算

由极限的定义立即得知，我们可以按照下述规则进行极限的加法、乘法、减法和除法等初等运算.

如果序列 $a_1, a_2, \cdots$ 的极限是 a，序列 $b_1, b_2, \cdots$ 的极限是 b，则序列 $c_n = a_n + b_n$ 的极限是 c，并且

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = a + b.$$

序列 $c_n = a_n b_n$ 也是收敛的，并且

$$\lim_{n \to \infty} c_n = ab.$$

类似地，序列 $c_n = a_n - b_n$ 也是收敛的，并且

$$\lim_{n \to \infty} c_n = a - b.$$

如果极限 b 不为零，则序列 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ 也是收敛的，并且具有极限

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \frac{a}{b}.$$

总而言之，我们可以将有理运算同求极限的过程**交换次序**；无论是先求极限然后进行有理运算，还是先进行有理运算然后求极限，我们将得到同样的结果.

只要证明了这些法则之一，所有这些法则的证明也就容易做到了. 我们来看极限的乘法. 如果关系式 $a_n \to a, b_n \to b$ 成立，则对于任何正数 ε，只要我们将 n 选得充分大，比如说 $n > N(\varepsilon)$，便可保证

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ 和 } |b - b_n| < \varepsilon.$$

如果我们写出

$$ab - a_n b_n = b(a - a_n) + a_n(b - b_n)$$

并且考虑到存在与 n 无关的正数 M，使得 $|a_n| < M$，则得到

$$|ab - a_n b_n| \le |b||a - a_n| + |a_n||b - b_n| < (|b| + M)\varepsilon.$$

因为如果我们把 ε 选得足够小，就可使 $(|b| + M)\varepsilon$ 成为任意小量，所以对于一切充分大的 n 值，ab 和 $a_n b_n$ 之差实际上将会成为任意小；这正是下列等式所要求的论述：

$$ab = \lim_{n \to \infty} a_n b_n,$$

仿照这个例子，读者可以证明其余有理运算的法则.

借助于这些法则，许多极限都能很容易地算出. 例如，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=1,$$

因为在第二个表达式中，我们可以直接对分子和分母取极限.

下述简单法则也是经常会用到的：如果 $\lim a_n = a, \lim b_n = b$，并且对于每一个 n 都有 $a_n > b_n$，则 $a \geq b$. 然而，我们决不能指望 a 总是大于 b. 正如序列 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{2n}$ 所表明的，对于这两个序列，有 $a = b = 0$.

c. 内在的收敛判别法. 单调序列

在上述所有例子中，我们所考虑的序列的极限都是已经知道的. 事实上，为了应用序列极限的定义，在我们能够证明序列收敛性之前就必须知道极限是什么. 如果序列极限的概念仅能给出这样的认识，即一些已知数能够用另一些已知数的某些序列来逼近，那么我们从极限概念所得到的东西就太少了. 极限概念在数学分析中的优越性主要在于这一事实：有些重要问题所具有的数值解，往往不能用别的方法直接得知或表示，但能用极限方式来描述. 整个高等数学分析就是由这一事实的一系列实例组成的，这一点在以后几章中将会变得越来越清楚. 把无理数表示为有理数的极限这种做法，便可当作第一个并且是典型的例子.

任何收敛的已知序列 $a_1, a_2, \cdots$ 都定义了一个数 l，即此序列的极限. 然而，由收敛性定义所引出的关于收敛性仅有的检验法，在于估计差值 $a_n - l$，而这种方法只是当 l 已知时才能应用. 因而重要的是要有一些收敛性的"内在"判别法，它们不要求预先知道极限值，而只涉及到序列各项本身. 最简单的一种"内在"判别法适用于一类特殊的序列——单调序列，并且包含着大多数重要实例.

单调序列的极限

序列 $a_1, a_2, \cdots$，如果每一项都大于或者至少不小于前一项，即

$$a_n \geq a_{n-1},$$

则称为单调增加的. 类似地，如果对于一切 n 有 $a_n \leq a_{n-1}$，则序列称为单调减少的. 无论是单调增加序列还是单调减少序列，都称为**单调序列**. 应用这个定义，我们有下述基本原理：

一个序列，如果既是单调的又是有界的，则是收敛序列

这个原理，虽然从直观可以令人信服地提出来，但直观并未能证明它；它同实数的性质有着密切的关系，而事实上同实数的连续性公理是等价的.

区间套公理（见 1.1 节 b)，即每一个区间套序列都包含着一个点，不难看作是单调有界序列收剑性的推论. 设 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots$ 是一个区间套序列. 根据区间套序列的定义，我们有

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1.$$

显然，无限序列 $a_1, a_2, \cdots$ 是单调增加的，而且是有界的，因为对于一切 n 有 $a_1 \leq a_n \leq b_1$. 因此，$l = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ 存在. 此外，对于任何 m，以及任何数 $n > m$ 我们有

$$a_m \leq a_n \leq b_m.$$

因而有

$$a_m \leq \lim_{n \to +\infty} a_n = l \leq b_m.$$

因此，区间套序列中的所有区间都包含着同一个点 l.（由区间套序列的另一性质 $\lim(b_n - a_n) = 0$ 可知，这些区间没有另外的共同点.）

柯西收敛判别法

我们知道收敛的序列一定是有界的，但未必是单调的（见第 67 页例 b). 因此，在研究一般序列时，最好有一种对于非单调序列也

适用的收敛性判别法．这一需要，通过一个简单条件——哥西收敛判别准则而满足了（这个准则是具有极限的实数列的内在特征；最重要的是它不要求**预先**知道极限值）：**序列** $a_1,a_2,\cdots$ **收敛的充分必要条件是，序列中具有足够大的下标** n **的各个元素** a_n，**它们相互之间的差为任意小**．确切地说，如果对于每一个 $\varepsilon>0$ 存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得每当 $n>N$ 和 $m>N$ 时就有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，则序列 a_n 是收敛的．在几何上，柯西条件表明，如果存在可任意小的区间，序列中只有有限个点处于此区间之外，则序列收敛．哥西收敛判别法的证明以及关于其重要性的讨论，将在补篇中进行．

d．无穷级数及求和符号

序列就是无穷多个数的有序排列 $a_1,a_2,\cdots$，**无穷级数**

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

则要求把序列各项按其出现的次序加起来．为了得到严格意义下的无穷级数之**和**，我们考虑第 n 个**部分和**，即级数前 n 项之和

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

对于不同的 n，部分和 s_n 构成序列

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\quad s_3=a_1+a_2+a_3,$$

如此等等．于是，无穷级数之和 s 定义为

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n,$$

如果这个极限存在，我们称无穷级数为**收敛**的．如果序列 s_n 发散，则此无穷级数称为**发散的**．例如，由序列 $1,q,q^2,q^3,\cdots$ 得到无穷几何级数

$$1+q+q^2+q^3+\cdots,$$

其部分和是

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

当 $|q| < 1$ 时，序列 s_n 收敛于极限

$$s = \frac{1}{1-q},$$

这个极限便表示无穷几何级数之和．当 $|q| \geq 1$ 时，部分和 s_n 没有极限，因而级数发散 (见第 73 页)．

对于 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，习惯上使用符号

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

来代替．此符号表示 a_k 之和，其中 k 取遍由 $k = 1$ 到 $k = n$ 的正整数．例如

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a^k b^{2k} = a^1 b^2 + a^2 b^4 + a^3 b^6 + \cdots + a^n b^{2n}.$$

更一数地，$\sum_{k=m}^{n} a_k$ 表示 k 取值 $m, m+1, m+2, \cdots, n$ 时所得到的一切 a_k 之和．例如

$$\sum_{k=3}^{5} \frac{1}{k!} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

在这些例子中，我们都用字母 k 表示求和指标．当然，其和与表示指标的字母无关．例如

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

我们用符号

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

表示整个无穷级数之和. 类似地, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ 应表示无穷级数 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ 之和, 其第 n 个部分和为 $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$.

前面的许多结果都能用这种求和符号写得更为简洁. 第 63 页上前 n 个自然数平方和的公式变为

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

几何级数之和的公式为

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{对于 } |q| < 1.$$

类似地, 二项式定理则表示为

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

因为一个无穷级数不过是序列 s_n 的极限, 所以其收敛性可根据序列的收敛性判别法来判断. 例如, 序列

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

的收敛性可由下述事实直接得到: 部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

随 n 增大而单调递增, 并且是有界的, 因为

$$\begin{aligned} 1 \le s_n &\le 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \frac{1 - 1/2^{n-1}}{1 - 1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

以后在第七章中，我们将要更加系统地来研究无穷级数.

e. 数 e

作为序列的极限而产生的数的第一个例子，我们考虑

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

于是，e 表示 $\lim_{n\to+\infty} S_n$，这里

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.^{1)}$$

数 e 和 π 是数学分析中应用最广泛的超越常数．为了证明极限 e 存在，我们只需证明序列 S_n 是有界的，因为数 S_n 单调增加．对于一切 n 值，我们有

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 3.
\end{aligned}$$

因此，数 S_n 具有上界 3. 又由于数 S_n 是单调增加序列，所以具有极限，我们用 e 来表示这个极限.

将 e 表示为级数，使我们有可能迅速地计算 e 的值到很精确的程度．以部分和 S_n 来逼近数 e 时所产生的误差，可用同某一个几何级数相比较的方法来估计，上面曾用这种方法给出 e 的上界 3.

---

1) 回忆到 0! 定义为 1 的这个约定，我们可将级数的第一项写为 1/0!，以便同以后各项的形成规律相一致．应注意，在我们采用的表示法中，S_n 实际上是无穷级数的第 $(n+1)$ 个部分和，而不是第 n 个．然而，这是无关紧要的.

对于任何 $n > m$, 我们有

$$
\begin{aligned}
S_n &= S_m + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\leq S_m + \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots\right] \\
&\leq S_m + \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots\right] \\
&= S_m + \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = S_m + \frac{1}{m}\frac{1}{m!},
\end{aligned}
$$

因此，当 $n > m$ 时

$$S_m < S_n \leq S_m + \frac{1}{m}\frac{1}{m!}.$$

令 n 无限增大，而 m 保持不变，我们得到

$$S_m < e \leq S_m + \frac{1}{m}\frac{1}{m!}.$$

因此，e 同 S_m 最多相差为 $\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m!}\right)$. 因为 $m!$ 随 m 增大而极其迅速地增大，所以对于适当小的 m，数 S_m 已经是 e 的很好的近似值了. 例如，S_{10} 同 e 之差小于 10^{-7}. 用这种方法我们求出 $e = 2.718281\cdots$.

e 是无理数 由 S_n 来估算 e 的上述方法，也能用来证明这一事实. 实际上，如果 e 是有理数，我们就能将 e 写为 $\frac{p}{m}$ 的形式，其中 p, m 都是正整数；这里 $m > 2$，因为 e 位于 2 和 3 之间，不能是整数. 将 e 同部分和 S_m 相比较，我们有

$$S_m < \frac{p}{m} \leq S_m + \frac{1}{m}\frac{1}{m!}.$$

如果将上式两端乘以 $m!$，我们就得到

$$m!S_m < p(m-1)! \leq m!S_m + \frac{1}{m} < m!S_m + 1.$$

但是

$$m!S_m = m! + m! + \frac{m!}{2!} + \frac{m!}{3!} + \cdots + \frac{m!}{m!}$$

是整数，因为右端和式中每一项都是整数. 于是，如果 e 是有理数，则整数 $p(m-1)!$ 将处于两个相继的整数之间，而这是不可能的[1].

作为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **的极限的数** e 前面曾用无穷级数之和定义的数 e，也可以作为序列

$$T_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

的极限而得到. 其证明是很简单的，同时也是讨论极限运算的一个有启发性的例子. 根据二项式定理，有

$$\begin{aligned}
T_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).
\end{aligned}$$

由此，我们立即看出：$T_n \le S_n < 3$. 此外，在 T_n 中，如果用较大的因子 $1-\frac{1}{n+1}, 1-\frac{2}{n+1}, \cdots$ 来代替因子 $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \cdots$，最后加上一个正项，则可得到 T_{n+1}，所以我们推断：T_n 又构成单调增加序列，由此可知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ 存在. 为了证明 $T = e$，我

1) 数 e 是无理数意味着，不存在线性方程 $ax+b=0$，其中系数 a, b 是有理数，而当 $a \neq 0$ 时以 e 作为解. 一个更强的命题已被证明（由埃尔米特证明），即不存在任何 n 次的多项式方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$，其中系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n (a_0 \neq 0)$ 为有理数，而以 e 作为根. 数 e 与"代数"数（例如 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{10}$）不同，我们称之为**超越**数，而代数数则为某些有理系数的多项式方程的根.

们注意到：当 $m > n$ 时

$$T_m > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$$

现在，如果固定 n，而令 m 无限增大，于是我们在左端得到数 T，在右端得到表达式 S_n，结果 $T \geq S_n$. 因此，对于每一个 n, $T \geq S_n \geq T_n$. 现在，我们令 n 增大，使得 T_n 趋向于 T; 由此双重不等式，得到 $T = \lim_{n\to\infty} S_n = e$. 这就是所要证明的命题.

以后（2.6 节，第 168 页）我们将从另一种观点再次导出数 e.

f. 作为极限的数 π

求极限的过程实质上可以追溯到古代（阿基米德），那就是确定数 π 的过程. 在几何上，π 表示单位圆的面积. 我们认为这个面积显然能用一个（有理的或无理的）数来表示，记为 π. 可是，如果我们想要以任何精确度计算出数 π，这个定义对于我们来说并没有什么帮助. 这时，我们必须借助于求极限的过程，即把数 π 表示为已知并且不难算出的数列的极限. 除此以外别无他法. 阿基米德在其穷举法中已经用过此过程，即通过正多边形当其边数不断增加时越来越紧密地贴合于圆这种方法来逼近圆. 如果我们设 f_m 表示圆的内接正 m 边形的面积，那么内接正 $2m$ 边形的面积则由下列公式给出 [由初等几何或由表达式 $f_n = (n/2)\sin(2\pi/n)$ 即可证明（见图 1.46)]:

$$f_{2m} = \frac{m}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (2f_m/m)^2}}.$$

现在，我们设 m 的取值范围不是一切正整数的序列，而是由 2 的各次幂所组成的序列，即 $m = 2^r$，换句话说，我们构成这样一系列正多边形，它们的顶点是通过反复平分圆周而得到的. 由几何图形明显地看出，f_{2^n} 构成递增有界序列，因而**具有**极限，这个极限就是圆的面积：

$$\pi = \lim_{n\to\infty} f_{2^n}.$$

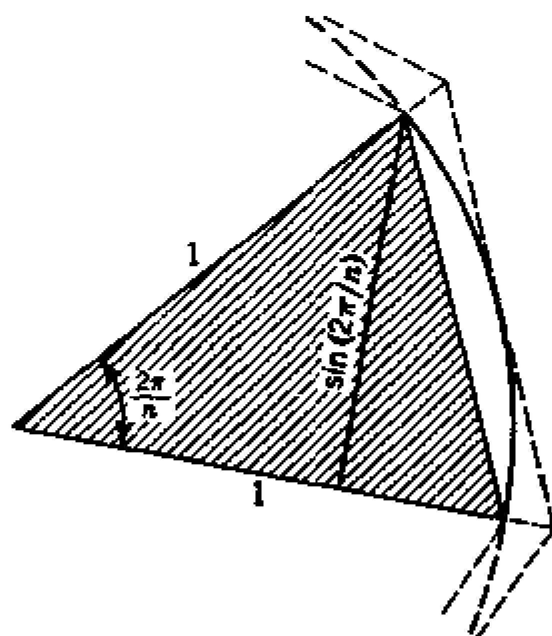


图 1.46

π 的这种极限表示法，实际上可以作为数值计算的基础；因为从数值 $f_4=2$ 出发，我们能够依次算出趋向于 π 的序列中的各项．而只要作出平行于内接 2^n 边形各边的圆的切线，可得到用任何一项 f_{2^n} 来表示 π 时的精确度的估值．这些切线构成同内接 2^n 边形相似的更大一些的外切多边形，两多边形边长之比为 $1:\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$．因此，外切多边形的面积 F_{2^n}，可由下式给出的面积比求得：

$$\frac{f_{2^n}}{F_{2^n}}=\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right)^2.$$

因为外切多边形的面积大于圆的面积，所以我们有

$$f_{2^n}<\pi<F_{2^n}=\frac{f_{2^n}}{\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right)^2}=\frac{2f_{2^n}}{1+\sqrt{1-(f_{2^n}/2^{n-1})^2}}.$$

例如，$f_8=2\sqrt{2}$，于是我们得到估值

$$2\sqrt{2}<\pi<\frac{4\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

上述这些内容读者在不同程度上是熟悉的．然而，我们要指出的是，借助穷举法用其面积不难算出的直边图形来计算各种面积，

奠定了积分概念的基础，这将在第二章中来介绍．为了实际计算 π 值，可以采用一些更为有效的方法，我们将在 6.26 节中学习它．

1.8 单连续变量的函数的极限概念

至今，我们所考虑的只是序列的极限，即整变量 n 的函数的极限．然而，极限概念却经常用来研究定义在某个区间内所有 x 上的函数 $f(x)$．

如果对于函数 $f(x)$ 有定义的、与 ξ 足够近的一切 x[1]，$f(x)$ 同 η 之差为任意小，那么我们就说当 x 趋向于 ξ 时函数 $f(x)$ 之值趋向于极限 η，或者用符号记为

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$$

极限 $\lim f(x)$ 的定义可以更清楚地表述如下．

每当指定任意的正数 ε 时，我们总能画出一个小区间 $|x-\xi| < \delta$，使得对于既属于 f 的定义域又属于这个小区间的任何 x，不等式 $|f(x)-\eta| < \varepsilon$ 成立，这时则有 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \eta$．

函数极限的概念同连续性的概念之间存在着密切的联系．如果 ξ 属于 f 的定义域，也就是说，如果 $f(\xi)$ 有定义，那么只要 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ 的确存在，则其值必定为 $f(\xi)$．实际上，$\eta = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ 的定义特别意味着：对于每一个正数 ε，都有 $|f(\xi)-\eta| < \varepsilon$，因此 $\eta = f(\xi)$．现在，把极限的定义同连续的定义加以比较，我们便可看出关系式 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ 正是表示函数 f 在点 ξ 的连续性．因此，对于 f 定义域中的 ξ，$\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ 的存在，恰好说明 f 在点 ξ 是连续的．更一般地说，如果 $f(x)$ 在 ξ 处没有定义，而 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ 存在并且具有值 η，那么我们可以把这个 η 取为 f 在点 ξ 之值，这样构成的函数 f 在 ξ 处将是连续的．（可去奇点．见第 39 页）．

1) 这里假设，当任意接近于 ξ 时，存在着使 f 有定义的一些点．

函数的极限也可以完全借助于序列的极限来描述：命题

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$$

意味着对于每一个以 ξ 为极限的序列 x_n（当然，这里假设 x_n 属于 f 的定义域），都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\eta.$$

因为，如果 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\eta$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$，则对于充分接近于 ξ 的 x，$f(x)$ 可任意接近于 η；但是，只要 n 足够大，x_n 便充分接近于 ξ，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\eta$. 另一方面，如果每当 $x_n\to\xi$ 时都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\eta$，那么我们必定有 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\eta$. 否则，存在正数 ε，使得对于任意接近于 ξ 的某些 x 有 $|f(x)-\eta|\geq\varepsilon$；于是也就存在收敛于 ξ 的序列 x_n，使得 $|f(x_n)-\eta|\geq\varepsilon$，而这时 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 便不能是 η.

于是，函数 $f(x)$ 在点 ξ 的连续性也就是意味着：对于 f 的定义域中的每一个收敛于 ξ 的序列 x_n 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\xi)$. 更一般地说，对于在一个区间上连续的函数 $f(x)$，并且对于 f 的定义域中收敛于此区间内某一点的任何序列 x_n，关系式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

成立. 我们看到，对于连续函数来说，极限符号同函数符号可以改变次序或者说可以交换.

求函数之和、积以及商的极限时所用的法则，与序列极限运算法则（见第 77 页）是一样的：如果 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\eta$ 和 $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=\zeta$，则存在

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=\eta+\zeta,\quad \lim_{x\to\xi}(f(x)g(x))=\eta\zeta,$$

而当 $\zeta\neq 0$ 时，还有

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\eta}{\zeta}$$

这些法则的证明，与在序列的情况也是一样的．（如果把函数的极限写为序列的极限，则这些法则还能从序列运算法则推出．）因此，当 ξ 属于 f 和 g 的定义域时，**在点 ξ 连续的两个函数** $f(x)$ 与 $g(x)$ 之和、积以及商，仍然是连续的（对于商，这里必须仍假定 $g(\xi)\neq 0$）．

ξ 不属于 f 的定义域的那些情况，对于微分学来说，具有特别重要的意义．作为第一个例子，我们考虑关系式

$$\lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=n\xi^{n-1},$$

其中 n 为正整数．当然，函数 $f(x)=\dfrac{x^n-\xi^n}{x-\xi}$ 仅当 $x\neq\xi$ 时才有定义．但是，当 $x\neq\xi$ 时，代数恒等式

$$\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=x^{n-1}+x^{n-2}\xi+x^{n-3}\xi^2+\cdots+\xi^{n-1},$$

作为几何级数求和公式的结果，是成立的．为了求极限，我们只须令 x 趋向于 ξ，并且按照和与积的极限运算法则来计算右端的极限．

公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

不如上述公式那么明显（当然，正如第 53 页所述，这里角 x 是按“弧度”来度量的）．同样地，仅当 $x\neq 0$ 时商 $\dfrac{\sin x}{x}$ 才有定义．

但是，如果我们**规定**当 $x=0$ 时 $\dfrac{\sin x}{x}=1$，则使得这个商成为在 $x=0$ 处也连续的一个函数．这里，我们通过几何上的讨论来证明上述极限公式．

在图 1.47 中，我们比较三角形 OAB，OAC 和单位圆中的扇形 OAB 的面积[1]，便可得知：如果 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x.$$

1) 当然，我们也可把角 x 定义为扇形 OAB 面积的两倍

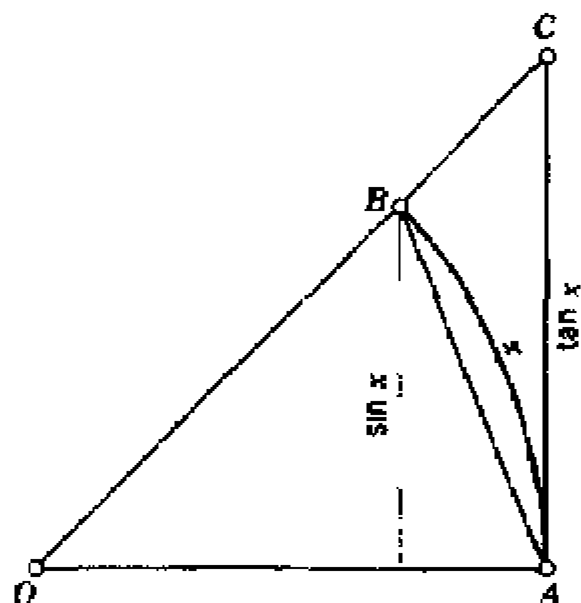


图 1.47

由此得到：如果 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$，则有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

即商 $\frac{\sin x}{x}$ 处于 1 和 $\cos x$ 两数之间．我们知道，当 $x\to 0$ 时 $\cos x$ 趋向于 1，因此，如果 x 足够接近于 0，则商 $\frac{\sin x}{x}$ 同 1 之差只能是任意小．这正是所要证明的公式的含意．

由上面证明的这个结论，还可以推得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$$

最后这个极限是由下列公式转换而来的：当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\frac{1+\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\sin x.$$

当 $x\to 0$ 时，右端的第一个因子趋向于 1，第二个因子趋向于 1/2，第三个因子趋向于 0，所以整个乘积趋向于 0．

用 x 除上述公式，我们得到

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x},$$

由此知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

当 $x\to\infty$ 时的极限 最后我们指出，考察连续变量 x 无限增大时的极限过程，也同样是可能的. 例如，方程

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

的意义是明显的. 它表示：只要 x 充分大，左端的函数同 1 之差为任意小. 求这一类和、积以及商的极限的法则，同前述其他情形一样.

*还有一个进一步的结果，在计算极限时也常常会用到，这就是求复合函数的极限法则. **复合函数** $f(g(z))$ 是定义在使得 $x=g(z)$ 位于 $f(x)$ 的定义域中的那些 z 值上的. 函数 $g(z)$ 可以是连续变量的函数，也可以是整序变量的函数，而 $f(x)$ 必须是连续变量的函数.

如果 $\lim\limits_{z\to\zeta}g(z)=\xi$，这里 ζ 是在 f 的定义域的某一个开区间之中，并且如果 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=\eta$，则 $\lim\limits_{z\to\zeta}f(g(z))=\eta$. 作为一个推论，我们得到，连续函数的连续函数本身也是连续的 (正如第 59 页上已经证明的).

这个结果显然可由下述事实得到：只要取充分接近于 ξ 的那些 x 我们便可使得 $f(x)$ 任意接近于 η，而为了使得 $x=g(z)$ 充分接近于 ξ，我们只须取充分接近于 ζ 的那些 z. 当其中任何一个变量改为无限增大时，上述结论稍加变动仍然适用.

a. 初等函数的一些注记

迄今，我们总是不言而喻地假设初等函数是连续的. 而现在这事实的证明是很简单的. 首先，函数 $f(x)=x$ 是连续的; 所以，$x^2=x\cdot x$ 作为两个连续函数之积也是连续的，并且同样地，x 的任一个幂都是连续的. 于是，每一个多项式作为连续函数之和，都是连续的. 每一个有理函数，作为连续函数之商，在使得分母不为零的每一个区间上也同样是连续的.

函数 x^n 是连续的并且当 $x \geq 0$ 时是单调的. 因此，$\sqrt[n]{x}$ 作为 x^n 的反函数是连续的. 由此不难得出下述结论：有理函数的 n 次根是连续函数 (除去分母为零之处).

利用已经建立的各种概念，现在就能够证明三角函数的连续性了. 但是，我们不在这里讨论，因为在第二章中 (第 187 页)，一切三角函数的连续性都可以看作这些函数可微性的推论而直接得到.

下面仅对指数函数 a^x、一般的幂函数 x^α 以及对数函数的定义和连续性，作几点说明. 正如 1.3 节 (第 52 页) 所述，我们假设 a 是正数，譬如说大于 1，而 $r=\frac{p}{q}$ 是正的有理数 (p 和 q 都是整数); 那么，$a^r=a^{\frac{p}{q}}$ 是这样一个正数，它的 q 次方是 a^p. 如果 α 是任何无理数，而 $r_1, r_2, \cdots, r_m, \cdots$ 是趋向于 α 的有理数序列，则我们可以断言：$\lim\limits_{m\to\infty} a^{r_m}$ 存在. 这时我们称这个极限为 a^α.

为了用柯西判别法来证明这个极限存在，我们只需证明，如果 n 和 m 充分大，则 $|a^{r_m}-a^{r_n}|$ 为任意小. 例如，我们假设 $r_n > r_m$，或者 $r_n - r_m = \delta$，这里 $\delta > 0$. 于是

$$a^{r_n} - a^{r_m} = a^{r_m}(a^\delta - 1).$$

因为 r_m 收敛于 α，所以 r_m 是有界的，a^{r_m} 也是有界的; 于是只需证明当 n 和 m 之值充分大时，正数

$$|a^\delta - 1| = a^\delta - 1$$

可任意小. 然后，只要 n 和 m 之值充分大，则一定可以使得有理数 δ 为任意小. 因此，如果 l 是任意大的正整数，那么当 n 和 m 充

分大时，就有 $\delta < \frac{1}{l}$. 现在，由关系式 $\delta < \frac{1}{l}$ 和 $a > 1$, 便得到[1]

$$1 < a^{\delta} < a^{\frac{1}{l}},$$

并且当 l 无限增大时 $a^{\frac{1}{l}}$ 趋向于 1, 由此立即得出上述所要求的论断.

还可以证明，按这种方式把 x 扩充到无理数时的函数 a^x 也是处处连续的，并且是单调的. 对于负的 x 值，这个函数自然可由方程

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

来定义. 当 x 取遍从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之值时，a^x 取从 0 到 ∞ 之间所有的值. 因此，它具有连续的、单调的反函数. 这个反函数称为**以 a 为底的对数函数**. 同样，我们可以证明：一般的幂函数 x^α 是 x 的连续函数，这里 α 是任何固定的有理数或无理数，而 x 则在区间 $0 < x < \infty$ 上变化，并且如果 $\alpha \neq 0$, 则此函数是单调的.

这里对于指数函数、对数函数和幂函数 x^α 所做的“初等的”讨论，以后 (第 168 页) 将从在原则上要简单得多的另一讨论所代替.

---

1) 这一结论可由以下事实得到：当 $a > 1$ 时，如果 $\frac{m}{n}$ 是正的，则幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 大于 1. 由于 $a = (a^{\frac{1}{n}})^m$ 为 m 个皆大于 1 的因子的乘积，因此它也大于 1.

补 篇

希腊数学的重大成就之一，是将许多数学命题和定理按逻辑上连贯的方式化归为为数不多的非常简单的公设或公理，即熟知的几何公理和算术法则，它们支配着如整数、几何点这样一些基本对象之间的关系. 这些基本对象是作为客观现实的抽象或理想化而产生的. 各项公理，或因从哲学观点看可认为是“显然”的，或仅仅因其非常有说服力，而不加证明地予以接受，而已定型的数学结构便建立在这些公理的基础之上. 在后来许多世纪中，公理化的欧几里得数学曾被认为是数学体系的典范，甚至为其他学科所努力效仿. (例如，像笛卡儿、斯宾诺沙等哲学家，就曾试图把他们的学说用公理方式，或者如他们所说，“更加几何化”地提出来，以便使之更有说服力.

经过中世纪的停滞时期以后，数学和自然科学一起，在新出现的微积分的基础上开始了突飞猛进的发展，这时公理化的方法才被人们遗弃了. 曾经极其广泛地开拓了数学领域的有创造才能的先驱们，并不因为要使这些新发现受制于协调的逻辑分析而束缚住自己，因此，在 17 世纪，逐渐广泛地采用直观证据来代替演绎的证明. 一些第一流的数学家在确实感到结论无误的情况下，运用了一些新的概念，有时甚至运用一些神密的联想，就像关于“无穷小数”或“无穷地小的量”等等. 由于对微积分新方法的威力的信念，促使研究者们走得很远. (如果束缚于严格的限制的框架上，这是不可能的.) 不过也只有那些具备卓越才能的数学大师们才有可能避免发生大错.

早期的那种不甚加鉴别但卓有成效的积极努力，逐渐地遇到了对抗的思潮，这种对抗在 19 世纪时达到高潮，但是仍没有阻止先前已出现的富于建设性的数学分析的发展. 19 世纪的许多大数学家，特别是柯西和外尔斯特拉斯 (Weierstrass)，在致力于严格的重新评价方面，都曾起过重大作用. 由于他们的努力，不仅为数学分析奠定了新的坚实的基础，而且使之更加清晰和简单，并为进一步重大的发展提供了根据.

当时，一个重要的目标是要用数的运算为基础来作严格推理以代替对于含混不清的"直觉"的盲目信赖；因为朴素的几何思想留下了一个令人不满的含混的余地，正如在以后各章中将会一再看到的那样. 例如，连续曲线的一般概念，就避开了几何上的直观正如前面定义所给出的，表示连续函数的连续曲线不需要在每一点上都具有确定的方向；我们甚至能构造一些连续函数，它们的图形处处都没有方向，或者说，这些曲线的长度都不能确定.

但是，我们决不能忘记，抽象的演绎推理只不过是数学的一个方面，*而数学分析的推动力量及其广大的视野，则来自物理现实和直观的几何.*

这些补充材料，将为本章中已经直观地处理过的各种基本概念提供严格的依据 (某些地方有重复之处).

S1 极限和数的概念

我们首先来考察 1.1 节中那些思想，较细致地分析一下实数概念及其同极限概念之间的联系. 并通过以自然数为基础的构造性程序来定义数的连续统. 然后，我们来证明这种推广的数的概念满足算术运算法则以及其他要求，从而使该数系成为度量的适用工具.

因为全面的阐述需要一本专门的著作[1]，所以我们仅仅指出一些主要的步骤. 通过学习这些有点乏味的材料，读者将会感到惊异

1) 例如，见 E. Landau, Foundations of Analysis 2nd Ed., Chelsea, New York 1960 (有中译本：艾·兰道，分析基础，高等教育出版社 1966).

的是，根据自然数，人的智力便能够建立起最适宜于科学度量任务的、逻辑上一致的数的系统[1].

a. 有理数

由有理区间定义的极限. 我们首先承认有理数系统以及从自然数的基本性质推出的有理数所具有的通常性质. 于是，有理数就按数值大小可以给出它的次序，因而使得我们可将“有理”区间定义为位于两个给定的有理数之间的有理数集合 (包括端点的区间称为**闭区间**). 端点是 a,b 的区间的长度为 $|b-a|$. 如在 1a 节中所述看出，有理数是**稠密**的，而每一个有理区间包含着无穷多个有理数. 我们暂时假设所出现的一切量都是有理数.

在有理数的范围内，我们来定义序列和极限 (见第 74 页). 给定有理数的无穷序列 $a_1, a_2, \cdots$ 以及有理数 r, 如果每一个将 r 包含在其内部的有理区间也包含着“**几乎所有的**”a_n, 即**包含着最多除去有限个数以外的所有的** a_n, 那么，我们就说

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r$$

由此立即可知：有理数序列的有理数极限不能多于一个，而且对于具有有理数极限的有理数序列来说，和、差、积、商的极限运算的一般法则 (见第 77 页) 是成立的.

这个定义的一个十分明显的推论是，取极限过程使顺序保持不变：如果 $\lim a_n = a, \lim b_n = b$, 并且对于每一个 n 有 $a_n \le b_n$, 则 $a \le b$. 注意，即便严格地假定 $a_n < b_n$, 我们也只能说 $a \le b$,

---

1) 也可以纯粹按公理方式引入实数，而将实数的一切基本性质看作为**公理**. 在本节将要采用的方法中，原则上我们只承认关于自然数的公理 (包括数学归纳法原理). 这时，有理数和实数都是在这个基础上**被构造出来的**. 因此，关于实数的“公理”，原则上只不过是有关自然数的一些需要证明的定理. 实际上，我们已经从认定有理数作为已知元素出发了. 因为由自然数构造有理数，以及推出有理数的基本性质，根本不会发生困难.

而不能排除极限相等的可能性（例如，两个序列 $a_n = 1 - \dfrac{2}{n}$ 和 $b_n = 1 - \dfrac{1}{n} > a_n$，都具有极限 1）.

关于极限的命题，可以借助于有理数的**零序列**来表述. 有理数的零序列是这样的有理数序列 $a_1, a_2, \cdots$，它满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

我们说 a_n"当 n 无限增加时变为任意小"，这指的是：对于任何正的有理数 ε（无论多么小），不等式 $|a_n| < \varepsilon$ 对于几乎所有的 n 都成立. 显然，序列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ 是零序列.

因此，有理数序列 a_n 具有有理极限 r，其充分必要条件是 $r - a_n$ 为零序列.

b. 有理区间套序列定义实数

我们在第 5 页上直觉地得到：有理点在实轴上是稠密的，并且在任何两个实数之间总是存在着有理数. 这使我们想到有可能完全依据有理数的顺序关系来严格地**定义**实数；现在我们就来介绍一种方法.

有理区间套序列（见第 9 页），乃是具有**有理数**端点 a_n, b_n 的**闭**区间序列 J_n，而每一个区间都包含在前一个区间之中，这些区间的长度构成零序列：

$$a_{n-1} \le a_n < b_n \le b_{n-1},$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

因为区间套序列中的每一个区间 $J_n = [a_n, b_n]$ 都包含后面所有的区间，所以位于任何区间 J_n 之外的有理数 r 也位于后面所有区间之外，并且在同一侧. 因此，有理区间套序列将一切有理数分割为

三类[1]. 第一类是由位于 n 足够大时的那些 J_n 区间左侧, 或者对于几乎所有的 n 来说有 $r < a_n$ 的有理数 r 组成的. 第二类是由包含在所有区间 J_n 中的有理数 r 组成的. 这一类最多只含有一个数, 因为当 n 增加时区间 J_n 的长度趋近于零. 第三类是由对于几乎所有的 n 有 $r > b_n$ 的有理数 r 组成的. 显然, 第一类中的任何数都小于第二类中的任何数, 而第二类中的任何数都小于第三类中的任何数. 点 a_n 本身不是在第一类中就是在第二类中, 而点 b_n 不是在第二类中就是在第三类中.

如果第二类不是空的, 那么它就是由唯一的有理数 r 组成的. 在这种情况下, 第一类是由小于 r 的有理数组成的, 第三类是由大于 r 的有理数组成的. 于是我们就说, 区间套序列 J_n **代表**有理数 r. 例如, 区间套序列 $\left[r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n}\right]$ 代表数 r.

如果第二类是空的, 那么区间套序列就不代表有理数; 这时这些区间套序列便用来代表无理数. 对于上述目的, 区间套序列中的特定的区间 $[a_n, b_n]$ 的选择并不重要; 本质只在于用此序列把有理数分割为三类这一点. 因为它告诉我们无理数在何处插入到有理数中去.

因此, 我们称两个有理区间套序列 $[a_n, b_n]$ 和 $[a'_n, b'_n]$ 是**等价的**, 如果它们将有理数分割为相同的三类. 作为练习, 请读者证明下述等价性的一个充分和必要条件: $a'_n - a_n$ 为零序列, 或者对于一切 n 来说不等式

$$a_n \leq b'_n, \quad a'_n \leq b_n$$

成立.

我们**以一个有理区间套序列** $[a_n, b_n]$ **来规定一个实数. 如果两个不同的区间套序列是等价的, 则由它们所确定的实数就认为是相等的**. 因此, 由等价的有理区间套序列将有理数划分成的三

1) 即所谓"戴德金分割".

类，是代表着一个实数．如果第二类是由一个有理数 r 组成的，我们就把这种分类所表示的实数看作为与有理数 r 是同一的．

*c．　实数的顺序、极限和算术运算

定义了实数以后，现在我们就能够来定义实数的顺序、和、差、积、极限等概念，并且来证明实数具有通常的性质．为了与任一种关于实数的定义相一致，必须使得：（1）在实数为有理数的情况下，具有通常的意义，（2）与用来代表实数的特定区间套序列的选择无关．

*以实数为端点的区间

虽然至今为止，总是假设区间套的端点是有理数，即使在定义无理数时，也是如此．可是现在我们必须去掉这种限制，并且证明我们能够像运算有理数一样地来运算实数．在进行证明的过程中，每一步我们都必须仔细，要避免依靠那些从我们的基础 —— 有理数出发而尚未通过逻辑推理而证明的事实．

我们用字母 $x, y, \cdots$ 来表示实数．如果实数 x 是由有理区间套序列 $[a_n, b_n]$ 给出的，则记为 $x \sim \{[a_n, b_n]\}$．由前面的实数的定义，我们可引出关于实数 $x \sim \{[a_n, b_n]\}$ 与有理数 r 之间的顺序的一个很自然的定义，根据 r 属于该区间套序列形成的有理数分划中的第一类、第二类还是第三类，我们分别说 $r < x, r = x, r > x$．显然，这个定义同确定 x 的特定的区间套序列 $\{[a_n, b_n]\}$ 无关，并且当 x 为有理数时就是通常的意义．与此等价地，如果对于几乎所有的 $n, r < a_n$，我们就说 $r < x$，如果对于所有的 $n, a_n \leq r \leq b_n$，就说 $r = x$，如果对于几乎所有的 $n, r > b_n$，就说 $r > x$．

通过实数同有理数的比较，我们就能够在实数间彼此进行比较．设 $x \sim \{[a_n, b_n]\}, y \sim \{[\alpha_n, \beta_n]\}$．如果存在有理数 r，使得 $x < r < y$，我们就说 $x < y$．显然，这个定义同代表 x 和 y 的特定的区间套序列是无关的，因为与有理数 r 进行比较，同特定的区间套序列是无关的．因此，如果存在有理数 r，使得对于几乎所有的 n，有 $b_n < r < \alpha_n$，或者简单地说，如果对于几乎所有的 n，有

$b_n < \alpha_n$, 我们就说 $x < y$. 关系式 $x < y$ 排除了 $y < x$ 或 $x = y$ 的可能性. 显然, 如果 $x < y$, 而 $y < z$, 则意味着 $x < z$.

对于任何两个实数 x 和 y, 关系式 $x < y, x = y, y < x$ 之一必须成立. 因为如果 $x \neq y$, 而且其中一个数, 譬如说 y, 是有理数, 则 y 必定属于由 x 所代表的分划的第一类或第二类, 也就是说, 不是 $y < x$ 就是 $x < y$. 如果 x 和 y 都不是有理数, 则相应的这两个分划的第二类都是空的, 而且必定存在一个有理数 r, 对于其中的一个数来说, 它属于第一类, 对于另一个数来说, 它属于第二类. 因此, 不是 $x < y$, 就是 $y < x$.

稠密性. 上述这些定义的一个直接推论, 乃是有理数的稠密性. 其意义为: 在任何两个实数 x, y 之间总是存在着一个有理数 r. 我们还看出, 如果实数 x 是由有理区间套序列 $[a_n, b_n]$ 所代表的, 则对于所有的 n, 有 $a_n \leq x \leq b_n$. 因为, 如果对于某一个 m 来说, $x < a_m$, 则对于几乎所有的 n 来说, $b_n < a_m$, 这与对于所有的 n 都成立的不等式 $a_m < b_n$ 相矛盾. 因此, 每一个实数都能被限制在长度可任意小的有理区间 $[a_n, b_n]$ 之中.

当确定了实数的顺序以后, 我们就能讨论具有**实数端点**的区间. 有理数的稠密性, 保证每一个具有实端点的区间都包含有理数.

极限. 实数 x 称为实数序列 $x_1, x_2, \cdots$ 的**极限**, 如果每一个包含着 x 的具有实数端点的开区间, 对于几乎所有的 n, x_n 属于该区间. 这个定义与从前用有理区间给出的定义在下述意义下是一致的: 有理序列的有理数极限乃是同一数列在更一般的实数极限意义下的极限. 作为极限定义的一个推论, 我们看出, 对于由有理区间套序列 $[a_n, b_n]$ 代表的实数 x, 有

$$x = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

算术运算. 下面我们来对实数 $x \sim \{[a_n, b_n]\}$ 和 $y \sim \{[\alpha_n, \beta_n]\}$

定义**算术运算**. 最容易做到的是定义加法和减法运算, 我们定义

$$x + y \sim \{[a_n + \alpha_n, b_n + \beta_n]\},$$

$$x - y \sim \{[a_n - \beta_n, b_n - \alpha_n]\}.$$

要证明这些定义有意义是一道简单的练习题, 其细节留给读者 (见第 130 页问题 3). 例如, 对于 $x-y$, 只须证明 $[a_n-\beta_n, b_n-\alpha_n]$ 构成的区间套序列其长度趋向于零. 因此, 它们代表一个实数 z. 直接通过 x 和 y 来刻画有理数被 z 所代表的分割的二类, 便可证明 z 对于 x 和 y 的特定序列表示无关这一事实; 例如, 第一类是由有理数 $r < z$ 组成的, 或者说, 对于某些 n, r 总会被 $a_n - \beta_n$ 所超过; 这些 r 不难看作形式为 $s - t$ 的有理数, 这里 s 和 t 是分别满足不等式 $s < x, t > y$ 的有理数.

两个实数 x, y 之积, 当 $y > 0$ 时, 定义为

$$x \cdot y \sim \{[a_n\alpha_n, b_n\beta_n]\},$$

这里我们已经假设: 所有的 $\alpha_n > 0$; 在 $y < 0$ 和 $y = 0$ 的情况下, 怎样的区间套序列适用于 $x \cdot y$ 是很明白的. 当 y 是正**有理**数时, 积 $x \cdot y$ 也可表示为下列形式:

$$x \cdot y \sim \{[a_n y, b_n y]\}.$$

对于自然数 $y = m$, 积 $x \cdot y = mx$ 也能通过 x 的反复相加而得到, 即 $mx = x + (m-1)x = x + x + \cdots + x$.

实数的算术运算服从通常的法则. 特别是, 关系式 $x < y$ 等价于 $0 < y - x$. 我们还能引入实数的**绝对值**, 并且能够证明三角不等式 $|x+y| \leq |x| + |y|$ 成立. 于是, 上面通过顺序关系定义的实数序列的极限概念, 可以用一种与之等价的方式来表述: 如果对于每一个正实数 ε, 关系式 $|x - x_n| < \varepsilon$ 对于几乎所有的 n 都成立, 则 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

现在我们来证明所谓的阿基米德公理.

阿基米德公理 如果 x 和 y 都是实数, 而且 x 为正, 则存在一个自然数 m, 使得 $mx > y$.

实质上, 这意味着: 一个实数同另一个实数相比, 既不能是"无穷地小"也不能是"无穷地大"(除非其中之一为零). 为了证明阿基米德公理 (在我们的论述中, 它实际上是一个定理), 我们注意到, 对于有理数来说, 它乃是整数的普通性质的推论. 现在, 如果 $x \sim \{[a_n, b_n]\}$ 和 $y \sim \{[\alpha_n, \beta_n]\}$ 是实数, 而且 x 为正, 则对于几乎所有的 n, 有 $a_n > 0$. 因为 a_n 和 b_n 都是有理数, 所以我们能够找到一个如此大的 m, 使得 $ma_n > \beta_n$, 因此 $mx > \beta_n \geq y$.

d. 实数连续统的完备性. 闭区间的紧致性. 收敛判别法则

实数使得有理数的极限运算成为可能的了, 但是如果实数也来进行相应的极限运算时, 还需要再引入一种"非实数"以填补到实数之间, 并且如此下去没完没了的话, 实数的价值就不大了. 幸好, 实数的定义是如此完备, 以致若不放弃实数系的基本性质之一, 就不可能将它进一步扩充. (例如为引进复数就必须放弃"顺序")

连续性原理

实数连续统的这种完备性是通过下述基本的连续性原理来表示的 (参见第 7 页) 每一个具有实数端点的区间套序列都包含着一个实数. 为了证明这一点, 我们来考虑这样一些闭区间 $[x_n, y_n]$, 每一个区间都包含在前一个区间之中, 而它们的长度 $y_n - x_n$ 构成零序列. 我们可以断言, 存在一个实数 x, 它包含在所有的 $[x_n, y_n]$ 之中; 因而, 序列 x_n 和 y_n 都以 x 为极限. 为此, 我们用包含 $[x_n, y_n]$ 的有理区间套序列 $[a_n, b_n]$, 来代替区间套序列 $[x_n, y_n]$. 于是, 这个有理区间套序列将确定一个所需的实数 x. 对于每一个 n, 设 a_n 是小于 x_n 的形式为 $\frac{p}{2^n}$ 的最大有理数, 而 b_n 是大于 y_n 的形式为 $\frac{q}{2^n}$ 的最小有理数, 这里 p 和 q 都是整数. 显然, 这些区间 $[a_n, b_n]$ 构成代表实数 x 的区间套序列. 如果 x 位于某一个区间 $[x_m, y_m]$ 之

外，譬如说 $x < x_m$，那么就会存在一个有理数 r，使得 $x < r < x_m$，于是，对于所有充分大的 n，我们有

$$y_n < b_n < r < x_m \leq x_n,$$

而这是不可能的．因此，所有的区间 $[x_m, y_m]$ 都包含着点 x．

外尔斯特拉斯原理　　紧致性

上述连续性原理的其他几种形式也是很重要的．第一种形式是关于有界序列存在极限点或凝聚点的外尔斯特拉斯原理．我们说点 x 是序列 $x_1, x_2, \cdots$ 的极限点，如果每一个包含 x 的开区间，就有无穷多个 n，使得 x_n 属于该区间．请注意这个定义同极限定义之间的差别，在极限的定义中，是对于几乎所有的 n，即对于最多除去有限个数以外的所有的 n，或者对于所有充分大的 n 来说，x_n 都必须位于开区间之中．如果序列有极限，则此极限也是序列的极限点，事实上是唯一的极限点．也可能不存在极限点（例如序列 $1, 2, 3, 4, \cdots$），也可能存在唯一的极限点（例如收敛的序列），也可能存在几个极限点（例如，序列 $1, -1, 1, -1, \cdots$ 有两个极限点 $+1$ 和 -1）．外尔斯特拉斯原理断定：每一个有界序列至少具有一个极限点．

为了证明这一原理，我们注意到：由于序列 $x_1, x_2, \cdots$ 是有界的，所以存在一个包含着所有 x_n 的区间 $[y_1, z_1]$．从 $[y_1, z_1]$ 开始，我们对 n 用归纳法来构造区间套序列 $[y_n, z_n]$，使得每一个区间都包含着无穷多个点 x_m．如果 $[y_n, z_n]$ 包含着无穷多个 x_m，那么我们就用区间的中点把 $[y_n, z_n]$ 分为两个相等的部分．如此所得到的两个闭区间，至少有一个必定包含着无穷多个 x_m，取定它并记作 $[y_{n+1}, z_{n+1}]$．显然，$[y_n, z_n]$ 构成代表实数 x 的区间套序列，每一个包含 x 的开区间，对于充分大的 n 来说，将包含着区间 $[y_n, z_n]$，因而必定包含着无穷多个 x_m

极限点也可用无穷序列 $x_1, x_2, \cdots$ 的**子序列的极限**来定义. 子序列是从给定序列中抽出来的任一无穷序列, 也就是形式为 x_{n_1}, x_{n_2}, $\cdots$ 的序列, 这里 $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots$. 显然, 一个点 x 是序列 $x_1, x_2, \cdots$ 的极限点, 如果它是某个子序列的极限. 反之, 对于任何极限点 x, 我们能够用归纳法来构造收敛于 x 的子序列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$. 如果 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$ 已经确定, 那么我们就在 $n > n_k$ 和 $|x_n - x| < 2^{-k}$ 的无穷多个整数 n 中, 取一个作为 n_{k+1}.

这样, 我们可将外尔斯特拉斯原理用如下形式给出:

定理 **每一个有界无穷实数序列, 都具有收敛的子序列.**

一个集合称为**紧致的**, 如果由它的元素构成的每一个序列都包含着收敛于该集合中一个元素的子序列. 现在再重新来叙述上面的定理, 我们可说, **实数集的闭区间是紧致集.**

单调序列

上述定理的一个特殊推论是: **每一个单调有界序列都是收敛的.** 事实上, 设序列 $x_1, x_2, \cdots$ 是单调的, 譬如说, 是单调增加的. 如果这个序列又是有界的, 那么它就具有极限点 x. 因为序列中相继的各项都是递增的, 所以在这个序列中必定存在着一些点 x_n, 它们可任意接近 x 但都不超过 x; 如果 $x_n > x$, 则对于 $m > n$, 便有 $x_m > x_n > x$. 由此可知, 每一个包含 x 的区间都包含着几乎所有的 x_n, 或者说, x 是该序列的极限.

柯西收敛判别法

序列是单调有界的这一条件, 对于收敛性来说, 是**充分条件**. 这个命题的重要意义在于: 它常使我们能够证明序列极限的存在而不必预先知道极限的值; 并且, 在具体应用时, 序列的单调性和有界性通常是容易检验的. 但是, 并非每一个收敛序列都必定是单调的 (虽然它必须是有界的), 因而更重要的是要有一个较为通用的收敛性判别法则. 这就是柯西的**内在收敛判别法**, 它是一个序列极限存在的充分和必要条件:

序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ **是收敛的，当且仅当对于每一个正数** ε，**存在一个** N，**使得对于所有大于** N **的** n **和** m，$|x_n - x_m| < \varepsilon$ **成立**.

换言之，一个序列是收敛的，如果这个序列中下标足够大的任何两项彼此之差都小于 ε.

我们来证明这个条件对于收敛性来说是必要的. 如果 $x = \lim x_n$，那么对足够大的 n，每一个 x_n 同 x 之差都小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$，因此，根据三角不等式，每两个这样的值 x_n 和 x_m 彼此之差都小于 ε. 反之，我们考虑这样一个序列，对于任何 $\varepsilon > 0$ 和对于所有充分大的 n 和 m，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 这时，存在一个数值 N，使得几乎所有的 x_n 都能够被包括在一个长度为 2 的区间之中. 这样，我们也就能够作出一个适当大的区间，使得它还包含可能位于以 x_N 为中心长度为 2 的区间之外的有限个数 x_n. 于是序列是有界的. 因此具有极限点 x. 进一步，对包含 x 的每一个开区间，它也包含着具有充分大下标 m 的那些点 x_m. 这是因为对于充分大的 n 来说，x_n 彼此之差为任意小. 这就得知，包含 x 的开区间必定包含几乎所有的 x_n. 于是 x 为序列的极限.

e. 最小上界和最大下界

有界的实数集合存在着"一切可能中的最好的"上界和下界，这一点是极为重要的. 实数 x 的集合 S 是**有界的**，如果 S 中所有的数都能被包括在同一个有限区间之中. 这时，存在 S 的**上界**，即这样的一些数 B，使得 S 中的任何数 x 都不超过 B:

$$x \leq B \quad \text{对于} S \text{ 中所有的} x.$$

类似地，存在 S 的**下界** A:

$$A \leq x \quad \text{对于} S \text{ 中所有的} x.$$

例如，对于自然数倒数的集合 1, 1/2, 1/3, 1/4, $\cdots$ 来说，任何数 $B \geq 1$ 都是上界，任何数 $A \leq 0$ 都是下界；这里，数 1 ─ 集合中

的一个元素——是最小的上界，而数 0——虽然不是集合中的元素，但它是集合元素的极限点——是最大的下界．实数集合的最小上界通常称为它的**上确界**，而最大的下界则称为其**下确界**．一般说来，集合的上确界和下确界，如果不是集合中的元素，至少也是集合中元素序列的极限点．因为，如果 S 的最小上界 b 不属于 S，则在 S 中必定存在任意接近于 b 的一些元素，否则我们就能找到比 b 小的 S 的上界；因此，我们能够从 S 中依次地选出越来越接近 b 并且收敛于 b 的数列 $x_1, x_2, \cdots$．

从单调有界序列是收敛的这一事实，立即可以推知有界集合 S **存在最小的上界**．对于任一 n，我们定义 B_n 是分母为 2^n 的 S 的最小的有理数上界．显然，对于 S 中的任何 x 以及任何 n，有

$$x \leq B_{n+1} \leq B_n \leq B_1.$$

因此，B_n 构成单调减少的有界序列，它必定具有极限 b．不难看出，b 是 S 的上界，并且不存在更小的上界．最大下界的存在，可以用同样的方法来证明．

f. 有理数的可数性

关于有理数的一个惊人的发现是在 19 世纪后期得到的，这一发现促使 G. 康托 (Contor) 在 1872 年以后创造出**集合论**．虽然有理数是稠密的，并且不能按大小来排列，但是它们仍然可以排成一个无穷序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$，其中每一个有理数都出现一次．因此，有理数可以一一列举，或者说，可以这样数出来：第一个、第二个、$\cdots$、第 n 个、$\cdots$ 有理数，当然，序列中各数的顺序并不是按照它们大小来排列的．这个对于任何区间上的有理数都同样成立的结论，可以用一句话来表达：**有理数是可数的**，或者说，**有理数构成可数集合**．

为了证明这个结果，我们仅对正有理数给出一个排成序列的方案．每一个正有理数都能写成 $\frac{p}{q}$ 的形式，其中 p 和 q 是自然数．

对于每一个正整数 k, 正好存在着 $k-1$ 个分数 $\frac{p}{q}$, 其中 $p+q=k$. 将这些分数按 p 增加的顺序排列起来. 对于 $k=2,3,4,\cdots$ 依次写出不同的数组, 我们便得到 (见图 S1.1) 一个包含着所有正有理数的序列. 去掉分子和分母具有大于 1 的公因子的那些分数 (该分数和前面某一个分数表示同一有理数), 我们便得到序列

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{1},\frac{1}{6},\frac{2}{5},\cdots,$$

其中每一个正有理数正好出现一次. 我们不难构造出包含所有的有理数或某一特定区间上的所有有理数的类似的序列.

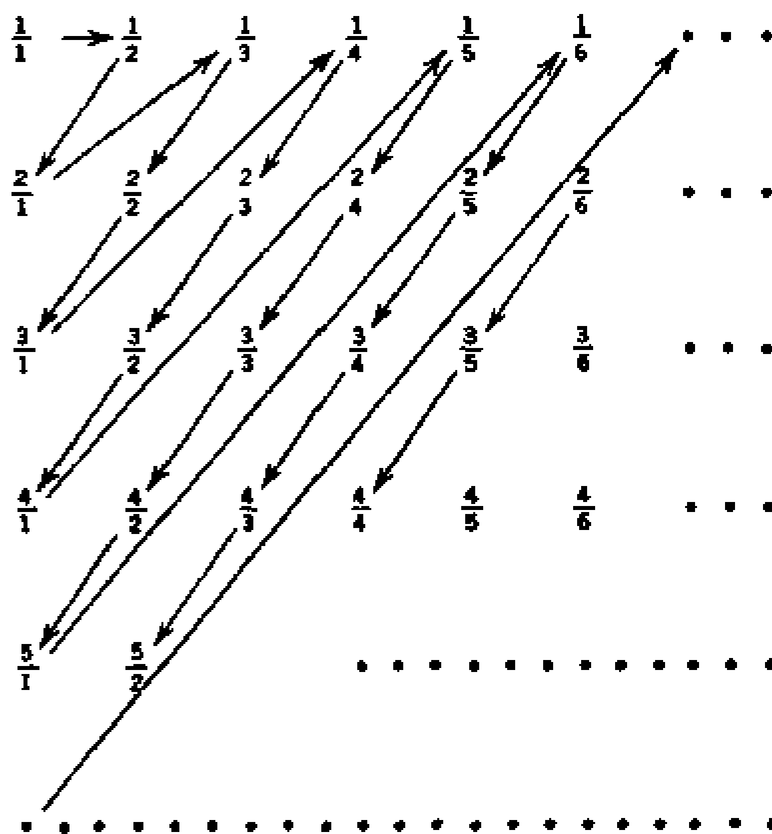


图 S1.1 正有理数的可数性

这一结果, 只有补充下面另一基本事实后才能有相当深入的理解, 即一切实数的集合是不可数的[1]. 这一点说明, 实数集合比有理数集合包含着 "多得多的" 元素, 虽然这两个集合都是无限的; 因此, 可数性实际上是集合的一种限止性很强的性质.

---

1) 关于集合论的这一基本事实的证明和简短的一般性讨论, 见 Courant 和 Robbins 的《What is Mathematics》一书第 81 页

集合论在数学中起着一种重要的澄清作用，虽然对它无限制的普遍应用导致了一些自相矛盾的结果，并且引起了争论．然而，这种悖论并没有影响富有建设性的数学的实质，而且在实数的集合论中是不存在的．

§2　关于连续函数的定理

连续函数的一些重要性质，是建立在实数完备性的基础之上的．我们回忆连续性的定义：函数 $f(x)$ 在点 ξ 是连续的，如果对于任何给定的正数 ε，不等式 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ 对于充分接近 ξ 的一切 x 都成立，或者说对于与 ξ 相差小于适当的量 δ 的一切 x 都成立，δ 一般与 ε 和 ξ 的选择有关．当然，在这个定义中我们仅考虑使得 f 有定义的那些 x 和 ξ 之值．

连续性的定义可以借助于序列的收敛性更简洁地表达如下：$f(x)$ **在点 ξ 是连续的，如果对于每一个具有极限 ξ 的序列 $x_1, x_2, \cdots$，有** $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\xi)$（这里 x_n 和 ξ 之值仍在 f 的定义域中）．这两个定义的等价性在 1.8 节中已经证明过（第 89 页）．

如果 $f(x)$ 在一个区间的每一点上都是连续的，则称 f **在这个区间上是连续的**．如果对于给定的 $\varepsilon>0$，只要 x 和 ξ 充分接近而不管它们在区间中的位置如何，我们都有 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$，则称 f 是**一致连续的**；因此，如果在连续性定义中出现的量 δ 能够选择得与 ξ 无关，即对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|x-\xi|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$，则 f 是一致连续的．对于实际应用来说，这意味着，如果我们把 f 有定义的区间划分为足够多的等长的子区间，则 f 在每一个子区间上的变化都小于预先指定的量 ε：在任何一点上，f 的值与它在同一子区间上其他任何点的值之差都小于 ε．

现在我们来证明：**每一个在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数，在这个区间上都是一致连续的**．

如果 f 在 $[a,b]$ 上不是一致连续的，则存在一个固定的 $\varepsilon>0$，且存在着 $[a,b]$ 上彼此任意接近的点 x,ξ，使得 $|f(x)-f(\xi)|\ge\varepsilon$．于是对于每一个 n，就可以在 $[a,b]$ 上选取点 x_n,ξ_n，使得 $|f(x_n)-f(\xi_n)|>\varepsilon$ 和 $|x_n-\xi_n|<\frac{1}{n}$．因为 x_n 构成有界数列，所以我们能够找到收敛于区间 $[a,b]$ 上一点 η 的子序列（利用闭区间的**紧致性**）．这时，相应的子序列 ξ_n 也要收敛于 η，因为 f 在 η 处是连续的，所以当子序列中的下标趋向于无穷大时，我们就可得到 $f(\eta)=\lim f(x_n)=\lim f(\xi_n)$，而这是不可能的，因为对于所有的 n 都有 $|f(x_n)-f(\xi_n)|>\varepsilon$．

中间值定理断言：如果 $f(x)$ 是区间 $a\le x\le b$ 上的连续函数，γ 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一数值，则存在 a 和 b 之间的某个适当的数值 ξ，有 $f(\xi)=\gamma$．这就是说，方程 $f(\xi)=\gamma$ 必定**存在解** ξ，如果我们能够指出两个数值 a 和 b，对于它们分别有 $f(a)<\gamma$ 和 $f(b)>\gamma$．由此可直接得到，如果 f 是连续的和单调的，则存在唯一确定的**反函数**，正如我们已经看到过的（第 47 页）．

为了证明中间值定理，设 $a<b$，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，而 $\alpha<\gamma<\beta$．设 S 是区间 $[a,b]$ 上使得 $f(x)<\gamma$ 的点 x 的集合．S 是有界的，因而具有也属于闭区间 $[a,b]$ 的最小上界 ξ．于是，对于 $\xi<x<b$，则有 $f(x)\ge\gamma$．点 ξ 或者属于 S，或者是 S 中的点列 x_n 的极限．在第一种情况下，$f(\xi)<\gamma$，但因为 $f(b)>\gamma$，所以 $\xi<b$，而在 ξ 和 b 之间存在着任意接近于 ξ 的一些点 x，使得 $f(x)\ge\gamma$．这是不可能的，如果 f 在 ξ 处是连续的并且 $f(\xi)<\gamma$．在第二种情况下，$f(\xi)\ge\gamma$；由于 $f(x_n)<\gamma$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，我们得到 $f(\xi)\le\gamma$，因为我们已经知道 $f(\xi)<\gamma$ 是不可能的，所以必定有 $f(\xi)=\gamma$．

闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的第三个基本性质是**存在最大值**，即在区间 $[a,b]$ 上存在点 ξ，使得对于此区间上所有的 x 来说，$f(x)<f(\xi)$．类似地，在此区间的某一点 η 上 f 将取到**最小值**：对于此区间上的所有 x 来说，$f(x)\ge f(\xi)$．重要的是区间必须

是闭的. 例如, 函数 $f(x)=x$ 或 $f(x)=\frac{1}{x}$ 都是连续的, 但是它们在开区间 $0<x<1$ 上并没有最大值. 因而最大值可能正好出现在一个端点上, 而如果 f 在端点是不连续的, 则最大值还可能根本不存在.

为了证明这一原理, 我们注意到: 在 $[a,b]$ 上连续的函数 f 必定是有界的, 也就是说, 构成 f 的"值域" S 的数值 $f(x)$ 都位于某一有限区间之中. 事实上, 由于 f 的一致连续性, 我们能够在区间 $[a,b]$ 上找到有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得 $f(x)$ 在此区间的任何点 x 上的值同数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 之一相差小于 1, 而 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 全体都能够被包含在一个有限区间之中. 进一步, 因为数值 $f(x)$ 的集合 S 是有界的, 所以它具有最小上界 M. 这个 M 是对于 $[a,b]$ 上所有的 x 来说是使得 $f(x)\leq M$ 成立的最小的数. 当然 M 或者属于 S, 或者是 S 中的某一点列的极限. 对于第一种情况, 则在 $[a,b]$ 上存在点 ξ, 使得 $f(\xi)=M$. 对于第二种情况, 则在 $[a,b]$ 上存在点列 x_n, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=M$. 于是, 我们能够找到收敛于 $[a,b]$ 上点 ξ 的 x_n 的子序列, 而由于 f 在 ξ 处的连续性, 又有 $f(\xi)=M$. 显然, $f(\xi)$ 是 f 的最大值.

§3 极坐标

第一章中, 我们曾在几何上用曲线来表示函数; 而解析几何学则遵循着相反的程序, 即从曲线出发并用函数 (例如用通过曲线上的点的一个坐标来表示其另一个坐标的函数) 来表示曲线. 这种观点自然会使我们想到除了以前所用的直角坐标以外, 可能采用更适宜于表示几何上给定曲线的其他一些坐标系. 最重要的一个就是极坐标系 r,θ. 点 P 的极坐标 r,θ 同直角坐标 x,y 之间的关系由下列方程给出:

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r^2=x^2+y^2,\ \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

其几何解释由图 S1.2 即可明了[1].

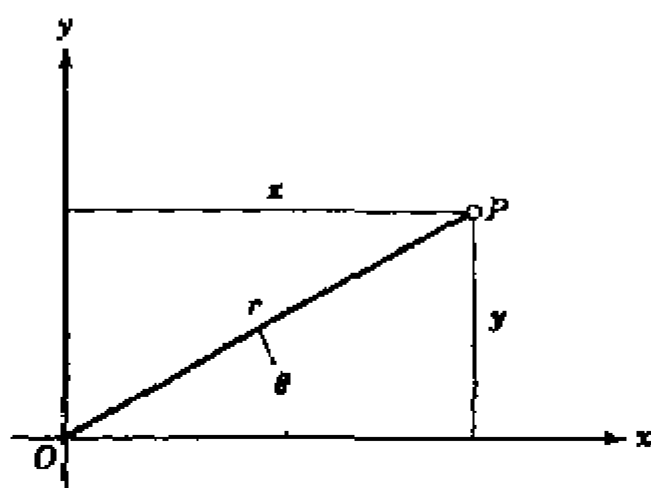


图 S1.2 极坐标

例如，我们考虑**双纽线**，双纽线在几何上定义为一切这样的点 P 的轨迹，点 P 与直角坐标分别为 $x = a, y = 0$ 和 $x = -a, y = 0$ 的两个固定点 F_1 和 F_2 的距离 r_1 和 r_2 之积为常值 a^2(见图 S1.3). 从

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+a)^2 + y^2,$$

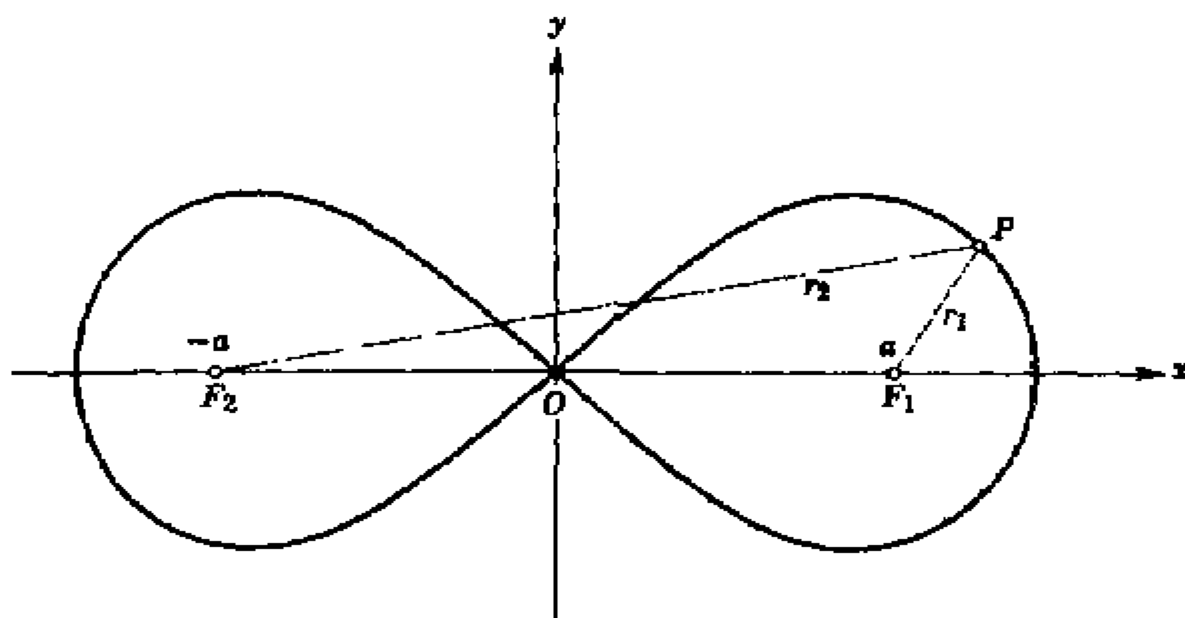


图 S1.3 双纽线

1) 极坐标不能由点 P 完全确定. 除了 θ 以外，角 $\theta \pm 2\pi$, $\theta \pm 4\pi$, $\cdots$ 中的任何一个也都能看成点 P 的极角.

经过简单的运算，我们便得到下列形式的双纽线方程

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

现在，引入极坐标，我们得到

$$r^4-2a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0,$$

除以 r^2 并应用简单的三角公式，上式化为

$$r^2=2a^2\cos 2\theta$$

因此，双纽线方程在极坐标中要比在直角坐标中形式简单.

§4 关于复数的注记

我们的研究将主要是基于实数连续统. 但是，为了便于进行第七、八、九章的各种讨论，我们请读者注意、研究代数学中的问题已使数的概念进一步扩充了，即产生了**复数**. 由自然数向实数的发展起因于下述要求：即为了消除例外现象并使得某些运算 (例如减法、除法) 以及点与数之间的相互对应总是可能的. 类似地，为了使每一个二次方程，实际上是每一个代数方程都具有解，我们就不得不引入复数. 例如，如果希望方程

$$x^2+1=0$$

具有根，我们就不得不引入新的符号 i 和 $-i$ 作为根. (如在复变函数论中所看到的，这就足以保证**每一个**代数方程都有解[1].)

如果 a 和 b 是普通的实数，则复数 $c=a+ib$ 表示一对数 (a,b). 它们按下述一般法则进行运算：我们对复数 (其中包括实数是作为 $b=0$ 的特殊情况) 进行加法、乘法和除法运算时，是将符号 i 当作

1) 代数方程的形式是 $P(x)=0$, 这里 P 是具有复系数的多项式.

未定的量来处理，并由此简化整个表达式，即利用方程 $i^2=-1$ 去掉 i 的高于一次的幂，最后只剩下形式为 $a+ib$ 的式子.

我们假设读者已经在某种程度上熟悉了复数. 但是在这里，我们还要强调指出一个特别重要的关系式，下面将用复数的几何或三角表示法来加以解释. 假设 $c=x+iy$ 是这样一个数，它在直角坐标系中我们用坐标为 x 和 y 的点 P 来表示它. 现在借助于方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，引入极坐标 r 和 θ(见第 112 页) 来代替直角坐标 x 和 y. 这时，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是点 P 同原点的距离，θ 是正的 x 轴同线段 OP 之间的夹角. 这样复数 c 就表示为下列形式

$$c=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

角 θ 称为复数 c 的幅角，量 r 称为复数 c 的绝对值或模，我们记之为 $|c|$. 这里"共轭"复数 $\bar{c}=x-iy$ 显然与 c 有相同的绝对值，但幅角则为 $-\theta$ (见图 S1.4). 显然

$$r^2=|c|^2=c\bar{c}=x^2+y^2.$$

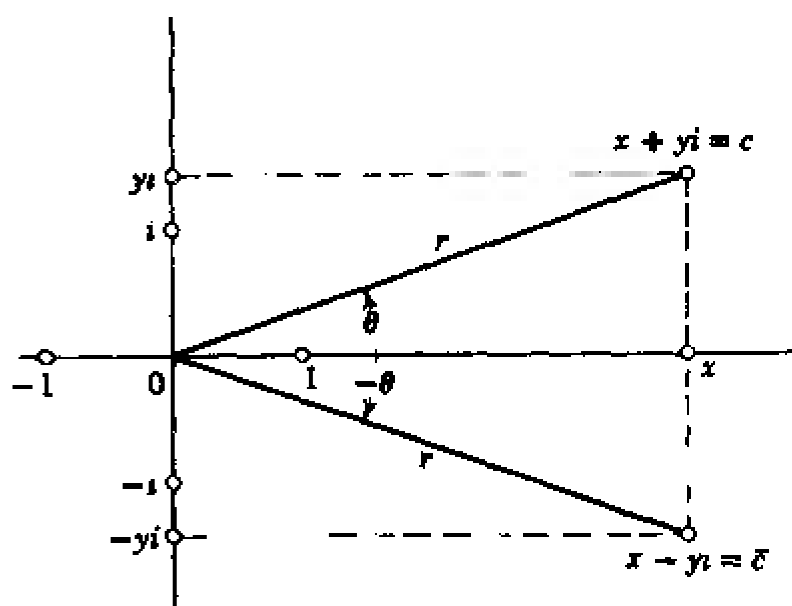


图 S1.4　复数 $x+iy$ 及其共轭复数的几何表示

如果我们利用这种三角表示法，复数的乘法则可取得特别简单

的形式，因为这时

$$c \cdot c' = r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')].$$

利用三角函数的加法定理，上式化为

$$c \cdot c' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')).$$

因此，复数相乘，只须将它们的绝对值相乘而将它们的辐角相加便可实现．著名的公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

通常称为德·莫阿弗尔(De Moivre)定理．由此我们得到下列关系式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta;$$

利用此式我们立即可求解方程如 $x^n = 1$，其中 n 为正整数；其根(即所谓单位根)是

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \varepsilon_2 = \varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \cdots,$$
$$\varepsilon_{n-1} = \varepsilon^{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}, \varepsilon_n = \varepsilon^n = 1$$

(见图 S1.5).

在几何上，对应着单位根的各点，是中心在原点半径为 1 之圆内接正 n 边形的顶点．

最后，如果我们设想将方程 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 左端的表达式按二项式定理展开，那么，只须将实部和虚部分开，便可得到 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的幂或幂的乘积来表示

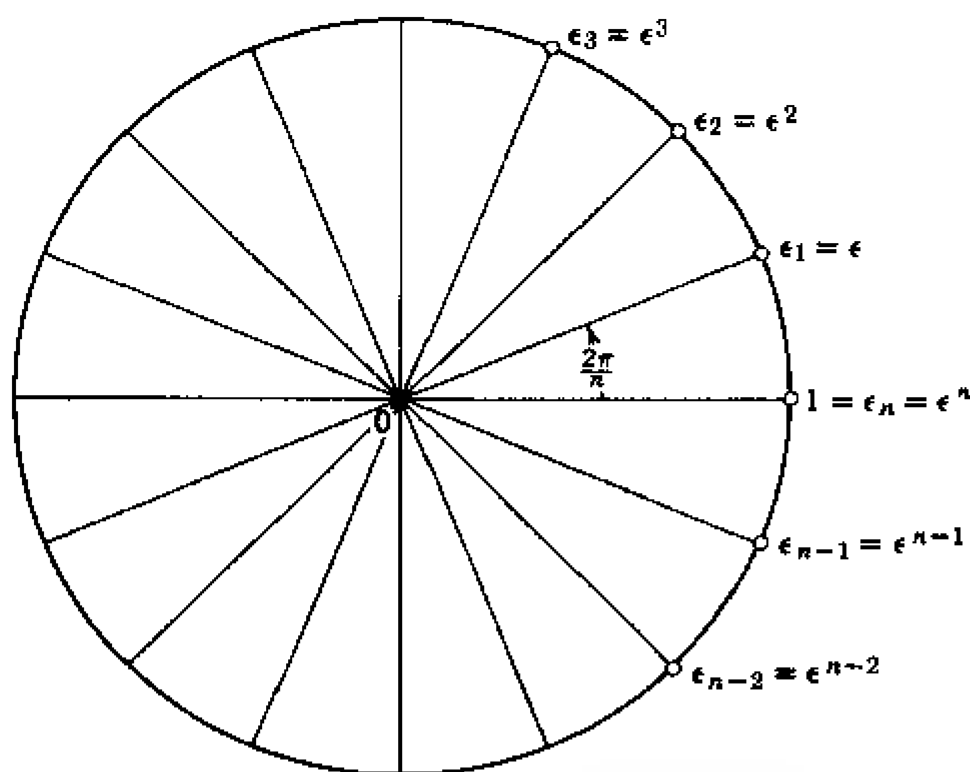


图 S15　单位 n 次根（当 $n = 16$ 时）

的表达式：

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \cdots,$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta + \cdots.$$

问　　题

1.1 节 a，第 2 页

1. (a) 如果 a 是有理数，x 是无理数，试证明 $a + x$ 是无理数，又如果 $a \neq 0$，试证明 ax 是无理数.

(b) 试证明任何两个有理数之间至少存在着一个无理数，因而存在着无穷多个无理数.

2. 试证明下列各数不是有理数: (a) $\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{n}$ 其中整数 n 不是完全平方, 即不是整数的平方; (c) $\sqrt[3]{2}$; (d) $\sqrt[p]{n}$, 其中 n 不是完全 p 次幂.

*3 (a) 对于整系数多项式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

的任何有理根, 如果写成既约分数时为 $\frac{p}{q}$, 试证明分子 p 是 a_0 的因子, 分母 q 是 a_n 的因子. (这一准则使我们能够得到一切有理实根, 从而证明任何其他实根都是无理数.)

(b) 试证明 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ 和 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 都是无理数.

1.1 节 c, 第 9 页

1. 设 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即 $[x]$ 是满足

$$x-1<[x]\leq x$$

的整数. 设 $c_0=[x], c_n=[10^n(x-c_0)-10^{n-1}c_1-10^{n-2}c_2-\cdots-10c_{n-1}]$, 其中 $n=1,2,3,\cdots$. 试证明 x 的十进小数表示是

$$x=c_0+0.c_1c_2c_3\cdots,$$

并证明这种结构排除了出现一串无穷多个 9 的可能性.

2. 对于两个实数 x, y, 试通过其十进小数表示法来定义不等式 $x>y$ (见补篇, 第 96 页)

*3. 如果 p 和 q 都是整数, $q>0$, 试证明 $\frac{p}{q}$ 展开为十进小数时或者是有限的 (末位以后的数字均为零), 或者是循环的; 也就是说, 从小数展开式上某一位以后, 是由给定的一组数字相继重复出现而组成的. 例如, $1/4=0.25$ 是有限的, $1/11=0.090909$ 是循环的. 重复出现的一组数字的长度称为十进小数的**周期**; 对于 1/11, 周期为 2. 试问在一般情况下 $\frac{p}{q}$ 的周期可能是多大?

1.1 节 e, 第 14 页

1. 试仅用不等号 (不用绝对值符号) 来表示满足下列关系式的 x 值, 并讨论所有的情况.

(a) $|x-a|<|x-b|$;

(b) $|x-a|<x-b$;

(c) $|x^2-a|<b$.

2. 一个区间 (定义见正文) 可以定义为实数连续统的任何连通部分. 实数连续统的子集 S 称为**连通的**, 如果对于 S 中的每一对点 a,b, 集合 S 就包含整个闭区间 $[a,b]$. 除了已经讲过的开区间和闭区间以外, 还有"半开"区间 $a\le x<b$ 和 $a<x\le b$(往往分别用 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 来表示), 以及无限区间——可以是整个实轴, 也可以是射线, 即"半实轴" $x\le a, x<a, x>a, x\ge a$(往往分别用 $(-\infty,\infty),(-\infty,a],(-\infty,a),(a,\infty),[a,\infty)$ 来表示)(也可参见第 24 页脚注).

*(a) 试证明上面所列举的几种区间包括了数轴的连通子集的一切可能情况.

(b) 试确定使下列不等式成立的区间:

(i) $x^2-3x+2<0$;

(ii) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$, 其中 $a<b<c$;

(iii) $|1-x|-x\ge 0$;

(iv) $\dfrac{x-a}{x+a}>0$;

(v) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\ge 6$;

(vi) $[x]\le\dfrac{x}{2}$, 见 113 页问题 1;

(vii) $\sin x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) 试证明: 如果 $a<x<b$, 则 $|x|\le|a|+|b|$.

3. 试导出下列不等式:

(a) $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$, 当 $x>0$ 时;

(b) $x+\frac{1}{x}\leq -2$, 当 $x<0$ 时;

(c) $|x+\frac{1}{x}|>2$, 当 $x\neq 0$ 时.

4 两个正数 a,b 的调和平均值 ξ 定义为

$$\frac{1}{\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

试证明调和平均值不超过几何平均值，即 $\xi\leq\sqrt{ab}$. 试问两平均值何时相等?

5. 试导出下列不等式:

(a) $x^2+xy+y^2\geq 0$;

*(b) $x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\cdots+y^{2n}>0$;

*(c) $x^4+3x^3+4x^2-3x+1\geq 0$.

试问等式何时成立?

*6. 当 $n=2,3$ 时，柯西不等式在几何上如何解释?

7. 试证明使柯西不等式中等号成立的充分必要条件是: a_r 与 b_r 成正比，即对于一切 r 有 $ca_r+db_r=0$, 其中 c 和 d 与 r 无关并且不全等于零.

8. (a) $|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|\geq a_3-a_1$, 当 $a_1<a_2<a_3$ 时. 试问 x 取何值时等式成立?

*(b) 试求对于一切 x 使得下式成立的最大的 y 值:

$$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|\geq y,$$

其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 试问在什么条件下等式成立?

9. 试证明对于正数 a,b,c, 下列不等式成立:

(a) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$;

(b) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$;

(c) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$.

10. 假设 x_1,x_2,x_3 和 $a_{ik}(i,k=1,2,3)$ 均为正数，并且 $a_{ik}\leq M$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1$. 试证明

$$a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{33}x_3^2\leq 3M.$$

*11. 试证明下列不等式，且给出当 $n < 3$ 时的几何解释：

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}\le\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_n^2)}+\sqrt{(b_1^2+\cdots+b_n^2)}.$$

12. 试证明下列不等式，且给出当 $n \le 3$ 时的几何解释：

$$\sqrt{(a_1+b_1+\cdots+z_1)^2+\cdots+(a_n+b_n+\cdots+z_n)^2}$$
$$\le\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}+\cdots+\sqrt{z_1^2+\cdots+z_n^2}.$$

13. 试证明 n 个正数的几何平均值不大于其算术平均值；即如果 $a_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

(提示：假定 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$．第一步，用几何平均值来代替 a_n，并调整 a_1，使得几何平均值保持不变.)

1.2 节 d，第 34 页

1. 如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的，并且 $f(a)>0$，试证明在 f 的定义域中，存在着包含 a 的一个开区间使其中的值 $f(x)>0$.

2. 在连续性的定义中，试证明有心区间

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \text{ 和 } |x-x_0|<\delta$$

可以用包含 $f(x_0)$ 的任意开区间和包含 x_0 的充分小的开区间来代替，如第 35 页中所示.

3. 设 $f(x)$ 在 $0\le x\le 1$ 上连续．又设 $f(x)$ 只取有理值，而当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)=\frac{1}{2}$．试证明处处为 $f(x)=\frac{1}{2}$.

4. (a) 设对于一切 x 值，$f(x)$ 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x\text{为无理数时},\\ 1, & \text{当}x\text{为有理数时}\end{cases}$$

试证明 $f(x)$ 处处不连续.

(b) 另一方面，考虑

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x\text{为无理数时,}\\ \dfrac{1}{q}, & \text{当}x=\dfrac{p}{q}\text{表示既约分数的有理数时.}\end{cases}$$

(有理数 $\frac{p}{q}$, 如果整数 p 和 q 没有大于 1 的公因子，且 $q>0$, 则称为既约分数．如 $g(\frac{16}{29})=\frac{1}{29}$.) 试证明对于一切无理数来说 $g(x)$ 是连续的，而对于一切有理数来说 $g(x)$ 是不连续的．

*5 如果对于一切 x 值和 y 值，$f(x)$ 满足函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

试对于 x 的有理值求 $f(x)$ 之值; 如果 $f(x)$ 是连续的, 试证明 $f(x)=cx$, 其中 c 是常数.

6. (a) 如果 $f(x)=x^n$, 试求 δ (它可以与 ξ 有关), 使得当 $|x-\xi|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

*(b) 如果 $f(x)$ 是任一多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $a_n\neq 0$, 同 (a) 一样，试求 δ.

1.2 节 e, 第 47 页

1. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调的，并且具有中间值性质，试证明 $f(x)$ 是连续的．如果 f 不是单调的，你能得出同样的结论吗？

2.(a) 试证明当 $x>0$ 时 x^n 是单调的; 从而证明当 $a>0$ 时 $x^n=a$ 具有唯一的正根 $\sqrt[n]{a}$.

(b) 设 $f(x)$ 是多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad (a_n\neq 0)$$

试证明：(i) 如果 n 是奇数，则 $f(x)$ 至少具有一个实根；(ii) 如果 a_n 和 a_0 符号相反，则 $f(x)$ 至少具有一个正根，此外，如果 n 是偶数，$n \neq 0$，则 $f(x)$ 还具有一个负根.

*3 (a) 试证明在每个方向上都存在一条平分任意给定的三角形的直线，即将三角形分为面积相等的两部分的直线.

(b) 对于任何两个三角形，试证明存在一条将它们同时平分的直线.

1.3 节 b，第 52 页

1 (a) 试证明 $\sqrt{x}$ 不是有理函数. (提示：对于 $x=y^2$ 考察将 $\sqrt{x}$ 表示为有理函数的可能性. 利用非零多项式最多只能有有限多个根这一事实.)

(b) 试证明 $\sqrt[n]{x}$ 不是有理函数.

1.3 节 c，第 53 页

1. (a) 试证明一条直线同高于一次的多项式的图形最多可相交于有限多个点.

(b) 试证明对于一般的有理函数也有同样的结果.

(c) 试证明三角函数不是有理函数.

1.5 节，第 61 页

1. 试证明二项式系数的下列性质：

(a) $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$;

(b) $1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$;

(c) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n(2^{n-1})$; (提示：用阶乘来表示二项式系数.)

(d) $1\cdot 2\binom{n}{2}+2\cdot 3\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)n\binom{n}{n}=n(n-1)2^{n-2}$;

(e) $1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

*(f) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$;（提示：考虑 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数.）

*(g) $S_n=\binom{n}{0}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{5}\binom{n}{2}-\frac{1}{7}\binom{n}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{n}{n}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

（提示：证明 $\frac{2n+2}{2n+3}S_n=S_{n+1}$.）

2. 试证明：当 $x>-1$ 时，$(1+x)^n\geq 1+nx$.

3. 试用数学归纳法证明 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

*4. 试用数学归纳法证明下列等式：

(a) $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$;

(b) $(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$.

5. 试证明：对于一切大于 1 的自然数 n，n 或者是素数，或者能够表示为素数的乘积.（提示：设 A_{n-1} 是对于一切不大于 n 的整数 k 的判断，即当 $k\leq n$ 时，k 或者是素数或者是素数之积.）

*6. 考虑分数序列

$$\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\cdots,\frac{p_n}{q_n},\cdots,$$

其中 $p_{n+1}=p_n+2q_n$，$q_{n+1}=p_n+q_n$.

(a) 试证明：对于一切 n 来说，$\frac{p_n}{q_n}$ 均为既约分数.

(b) 试证明：$\frac{p_n}{q_n}$ 同 $\sqrt{2}$ 之差的绝对值可为任意小，并证明当它逼近于 $\sqrt{2}$ 时产生的误差其符号正负交替出现.

7. 设 a,b,a_n 和 b_n 均为整数，并满足

$$(a+b\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2},$$

其中 a 是最接近 $b\sqrt{2}$ 的整数. 试证明 a_n 是最接近 $b_n\sqrt{2}$ 的整数

*8 设 a_n 和 b_n 为

$$a_1=3, a_{n+1}=3^{a_n} \text{ 和} b_1=9, b_{n+1}=9^{b_n}.$$

对于每一个 n 值, 试确定使得 $a_m>b_n$ 的最小的 m 值.

9. 如果 n 是自然数, 试证明

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

是自然数.

10 试确定一个平面可被 n 条直线分割成的最多块数. 证明最多块数是在没有两条直线平行和没有三条直线共点的情况下发生的, 并确定当允许平行和共点时的块数.

11. 试证明: 对于每一个自然数 n, 都存在自然数 k, 使得

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}.$$

12 试用数学归纳法证明柯西不等式.

1.6 节, 第 65 页

1. 试证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$.

2. 试证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=0$

3. 设 $a_n=10^n/n!$. (a) a_n 收敛于什么极限? (b) 此序列是单调的吗? (c) 此序列从某一个 n 以后是单调的吗? (d) 试给出 a_n 与其极限之差的估值. (e) 从什么 n 值以后这个差小于 1/100?

4. 试证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

5. (a) 试证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

(b) 试证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$

(提示: 将和式同其最大项进行比较.)

(c) 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$.

*(d) 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

6. 试证明每一个循环的小数都表示有理数. (同 1.1 节 c 问题 3 进行比较.)

7. 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{100}}{1.01^n}$ 存在, 并确定其值.

8. 如果 a 和 $b \le a$ 都是正数, 试证明 $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ 收敛于 a. 类似地, 对于任何 k 个固定的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 试证明 $\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$ 收敛, 并求其极限.

9. 试证明序列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$ 收敛, 并求其极限.

10. 如果 $v(n)$ 是 n 的素因子的个数, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v(n)}{n}=0$$

11. 试证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\xi$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\xi$, 其中 σ_n 是算术平均值 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$.

12. 试求

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

(提示: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

13. 如果 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})=0.$$

(提示: 将 $\sqrt{n}$ 作为因子提出.)

14. 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[(2n+1)]{(n^2+n)}=1$.

*15. 设给定的序列 a_n 使得序列 $b_n=pa_n+qa_{n+1}$ 是收敛的, 其中 $|p|<q$. 试证明 a_n 收敛. 又如果 $|p|\ge q>0$, 试证明 a_n 不一定收敛.

16. 试证明：对于任何非负整数 k，关系式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}i^{k}=\frac{1}{k+1}.$$

成立．（提示：对于 k 应用数学归纳法，并应用关系式

$$\sum_{i=1}^{n}[i^{k+1}-(i-1)^{k+1}]=n^{k+1};$$

将 $(i-1)^{k+1}$ 按 i 的幂展开．）

1.7 节，第 76 页

*1 设 a_1 和 b_1 是任意两个正数，并且 $a_1<b_1$．设 a_2 和 b_2 由方程

$$a_2=\sqrt{a_1b_1},\quad b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$$

来确定．类似地，设

$$a_3=\sqrt{a_2b_2},\quad b_3=\frac{a_2+b_2}{2},$$

一般地，

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\quad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}.$$

试证明：(a) 序列 $a_1,a_2,\cdots$ 收敛，(b) 序列 $b_1,b_2,\cdots$ 收敛，(c) 两序列具有相同的极限．（这个极限称为 a_1 和 b_1 的**算术-几何平均值**．）

*2 试证明：(a) 序列

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$$

的极限存在，(b) 此极限等于 2．

*3. 试证明序列

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

的极限存在；并证明此极限小于 1 但不小于 1/2.

4. 试证明序列

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

的极限存在，并且等于上例的极限.

5. 试证明上两例的极限 L 具有下列上、下界：

$$37/60 < L < 57/60.$$

*6 设 a_1 和 b_1 是任意两个正数，并且 $a_1 \leq b_1$ 设

$$a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \quad b_2 = \sqrt{a_1b_1},$$

一般地，

$$a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

试证明序列 $a_1, a_2, \cdots$ 和 $b_1, b_2, \cdots$ 均收敛，并且具有相同的极限.

*7. 试证明 $\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$（提示：考察 e 和 $\frac{1}{e}$ 的展开式的第 n 个部分和的乘积.）

8. (a) 不利用二项式定理，试证明 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调增加的，$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是单调减少的.（提示：考察 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 和 $\frac{b_n}{b_{n+1}}$. 利用 1.5 节问题 2 的结果.）

(b) 试问数 $(1000000)^{1000000}$ 和 $(1000001)^{999999}$ 哪一个较大？

9. (a) 由问题 8(a) 的结果，试证明

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(b) 当 $n > 6$ 时，试导出更强的不等式

$$n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

*10. 如果 $a_n > 0$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

11. 利用问题 10, 计算下列序列的极限:

(a) $\sqrt[n]{n}$ (b) $\sqrt[n]{n^3 + n^4}$ (c) $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

12. 试利用问题 11(c) 证明

$$n! = n^n e^{-n} a_n,$$

其中数 a_n 的 n 次根趋向于 1. (见第七章附录.)

13 (a) 试计算

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}.$$

(提示: 同 1.6 节问题 12(a) 相比较.)

(b) 试由以上结果证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

14. 设 p 和 q 是任意自然数. 试计算

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+p)(k+p+q)}.$$

15. 试计算

(a) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$

(c) 试求上面每一个表达式当 $n \to \infty$ 时的极限.

*(d) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是非负整数, 且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. 试说明如何对

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_m)}$$

导得一个公式, 如何求出 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

16 如果 a_k 是单调的，且 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，试证明 $\lim_{k\to+\infty} k a_k = 0$.

17 如果 a_k 是单调递减的，并且具有极限 0，又对于一切 k，$b_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$，试证明 $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = a_1$.

1.8 节，第 89 页

1 试证明：对于每一个 x 值，$\lim_{m\to+\infty}(\cos \pi x)^{2m}$ 存在，并且根据 x 是否为整数，此极限等于 1 或 0.

2. (a) 试证明：对于每一个 x 值，$\lim_{n\to+\infty}[\lim_{m\to+\infty}(\cos n!\pi x)^{2m}]$ 存在，并且根据 x 是有理数还是无理数，此极限等于 1 或 0.

(b) 试讨论这些极限函数的连续性.

补篇 1，第 96 页

1. 设 $r = \frac{p}{q}, s = \frac{m}{n}$ 是任意有理数，其中 p, q, m, n 是整数，且 q 和 n 是正的. 试用整数 p, q, m, n 来定义

(a) $r + s$,　(b) $r - s$,　(c) rs,　(d) $\frac{r}{s}$,　(e) $r < s$.

2. 对于有理区间套序列 $[a_n, b_n]$ 和 $[a'_n, b'_n]$，试证明：下列每一个条件都是等价的充分必要条件：

(a) $a'_n - a_n$ 是零序列;

(b) $a_n \leq b'_n$ 和 $a'_n \leq b_n$.

3. 给定 $x \sim \{[a_n, b_n]\}, y \sim \{[\alpha_n, \beta_n]\}$, (a) 试证明加法和减法的定义 $x + y = \{[a_n + \alpha_n, b_n + \beta_n]\}$, $x - y = \{[a_n - \beta_n, b_n - \alpha_n]\}$ 是有意义的. 具体地说，证明:

(i) 当 x 和 y 是有理数时，给出的表达式实际上是对于 $x + y$ 和 $x - y$ 的区间套列;

(ii) 如果 $x < y$, 则 $x + z < y + z$, 其中 z 是任意实数.

(b) 试定义乘积 xy, 并具体地证明所给的乘积定义是有意义的:

(i) 当 x 和 y 是有理数时，给定的区间套列实际上是对于 xy 的区间套列;

(ii) 如果 $x < y$，而 $z > 0$，则 $xz < yz$.

4. 试证明下列各原理是等价的，也就是说，任何一个都是另一个的推论.

(a) 每一个具有实端点的区间套序列都包含着一个实数;

(b) 每一个单调有界序列都是收敛的;

(c) 每一个有界无穷序列至少具有一个凝聚点或极限点;

(d) 每一个柯西序列都收敛;

(e) 每一个有界的实数集合都有下确界和上确界.

杂题

1. 如果 $w_1, w_2, \cdots, w_n > 0$，试证明加权平均值

$$\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

位于 x_1 到 x_n 中最大值与最小值之间.

2. 试证明

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

3. 试证明：当 $x, y > 0$ 时，有

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

并借助于 x^n 的图形，在几何上加以解释.

4. 如果 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，且 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$，试证明

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

5. (a) 试证明序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 能够写成级数 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ 的部分和的序列，其中 $u_n = a_n - a_{n-1}$（当 $n > 1$ 时）和 $u_1 = a_1$

(b) 试将序列 $a_n = n^3$ 写成级数的部分和序列.

(c) 用上一结论，试求出级数

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

的第 n 个部分和的公式.

(d) 由所得的 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 公式，试求

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n + 1)^2$$

的公式.

6. 一个序列，如果相继两项之差为常数，则称为一阶算术数列；如果相继两项之差构成一阶算术数列，则称为二阶算术数列；一般地，如果相继两项之差构成 $(k-1)$ 阶算术数列，则称为 k 阶算术数列.

数 4,6,13, 27, 50, 84 是算术数列的前六项. 试问此数列最低可能是几阶的？以这些数为开始项的最低阶算术数列的第八项是多少？

7. 试证明二阶算术数列的第 n 项可以写成 $an^2 + bn + c$ 的形式，其中 a,b,c 与 n 无关.

*8. 试证明 k 阶算术数列的第 n 项可以写成 $an^k + bn^{k-1} + \cdots + pn + q$ 的形式，其中 $a,b,\cdots,p,q$ 与 n 无关.

试求问题 6 中最低阶算术数列的第 n 项.

9. 试求以下列各数为开始项的最低阶的算术数列第 n 项的公式.

(a) 1,2,4,7,11,16,…；

(b) −7, −10, −9, 1, 25, 68, ….

*10. 试证明 k 阶算术数列前 n 项之和是

$$a_k S_k + a_{k-1} S_{k-1} + \cdots + a_1 S_1 + a_0 n,$$

其中 S_v 表示前 n 个 v 次幂之和，a_i 与 n 无关. 利用这一结果计算问题 9 中的算术数列之和.

11. 试通过将

$$v(v+1)(v+2)\cdots(v+k+1)-(v-1)v(v+1)\cdots(v+k)$$

由 $v=1$ 到 $v=n$ 求和，证明

$$\sum_{v=1}^{n} v(v+1)(v+2)\cdots(v+k)=\frac{n(n+1)\cdots(n+k+1)}{k+2}$$

12. 试利用关系式

$$v^3=v(v+1)(v+2)-3v(v+1)+v$$

计算 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

13. 试证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\log_2|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是连续的，但不是霍尔德尔连续的. （提示：通过考虑数值 $x=1/2^{n/\alpha}$，证明具有指数 α 的霍尔德尔连续性在坐标原点遭到破坏.）

14. 设 a_n 是非负数的单调递减序列. 试证明：当且仅当 $\sum_{v=0}^{\infty} 2^v a_{2^v}$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

15. 试研究下列序列的收敛性；如果收敛的话，试确定其极限：

(a) $n!e-[n!e]$

(b) a_n/a_{n+1}，其中 $a_1=0, a_2=1$，而 $a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$

第二章　积分学和微分学的基本概念

积分和微分是微积分学中两种基本的极限过程. 这两种过程的一些特殊的情况, 甚至在古代就已经有人考虑过 (在阿基米德的工作中达到高峰), 而在 16 世纪和 17 世纪, 更越来越引起人们的重视. 然而, 微积分的系统的发展, 只是在 17 世纪才开始, 并且通常认为是两位伟大的科学先驱——牛顿和莱布尼兹的创造. 这一系统发展的关键在于认识到: 过去一直是分别研究的微分和积分这两种过程是彼此互逆地联系着的[1].

公正的历史评价, 是不能把发明微积分这一成就归功于一两个人的偶然的和不可思议的灵感的. 许多人, 例如费尔马、伽利略 (Galileo) 和刻卜勒 (Kepler), 都曾为科学中的这些具有革命性的新思想所鼓舞, 对微积分的奠基作出过贡献. 事实上, 牛顿的老师巴罗 (Barrow), 就曾几乎充分认识到微分和积分之间的互逆关系——牛顿和莱布尼兹建立的系统微积分的基础这一基本思想. 牛顿将概念阐述得要较清楚一些; 而从另一方面来说, 莱布尼兹所用的巧妙的符号和计算方法则具有很大的启发性, 并且至今仍然是不可缺少的. 他们二人的工作, 立即促进了数学分析的一些较高深的分支学科的发展, 其中包括变分法和微分方程理论, 并且在科学中得到了极其广泛的应用. 然而令人十分奇怪的是, 虽然牛顿、莱布尼兹以及他们的直接继承者, 使得他们所掌握的这种强有力的工具得到了如此多种多样的应用, 但是谁都没有完全阐明他们工作中所包含着的一些基本概念. 他们讨论中所使用的 "无穷地小的量" 这一

1) 这一事实形成 "微积分基本定理"

概念，在逻辑上是站不住脚的，也是不能令人信服的．最后，直到19世纪，在通过严谨地表述极限概念和分析了实数的连续统后（像在第一章中说明的那样），才使微积分的基本概念得到澄清[1]．

我们首先来讨论一些基本概念．这些概念只有通过具体的说明和实例才能充分理解．所以，这里我们再次指出，同在本书的其他许多地方一样，当读者熟悉了后面一些章节中比较特殊和具体的材料以后，还要仔细地来研究理论的和一般性的章节．

2.1 积 分

a. 引言

只是经过长期发展以后，系统的积分法和微分法才给出了在几何学和自然科学中产生的直觉观念所需要的精确的数学描述．微分概念的产生是为了需要描述曲线的切线和运动质点的速度，更一般地说，是为了描述变化率的概念．曲边区域的面积的直觉观念，则在积分过程中得到了它的精确的数学表述．几何学和物理学中其他许多有关的概念也需要积分，正如后面我们将会看到的那样．在这一节中，我们从计算曲线所围成的平面区域的面积的问题来引出积分的概念．

面积　我们都有这样一种直觉：包含在一条封闭曲线中的区域有一个"面积"，它是由曲线内部正方形单位的数目来计算的．但是，对于面积的这种度量怎样才能用精确的术语来描述呢？回答这个问题，需要一系列的数学步骤．直观上可以联想到的面积的一些基本性质是：面积是一个（与长度单位的选择有关，且为正）数；对于全等图形来说，这个数是相同的；对于一切矩形来说，这个数是两相邻边长的乘积；最后，对于划分成几个部分的某一区域来说，其整个区域的面积等于各部分的面积之和．

1）微积分的产生过程可追溯到2000年以前，它是科学发明史上最精彩的篇章之一．有兴趣的读者可以参考 Carl B. Boyer, Concept of the Calculus, Hafner Publishing Company, 1949．也可参考 O. Toeplitz, Calculus, A Genetic Approach, University of Chicago, 1963．

由此，可以直接得到下述事实：如果区域 A 是区域 B 的一部分，则 A 的面积不能超过 B 的面积.

任何一个图形，如果它能够被划分成有限个矩形，那么根据上述性质，我们便可直接计算它的面积. 更一般地说，为了确定区域 R 的面积之值 F，我们首先考察另外两个可以划分成一些矩形的区域 R' (内接的) 和 R'' (外接的). 这里，R'' 包含着 R，而 R' 包含于 R 之中 (见图 2.1). 这时，我们至少知道，F 必定界于 R' 的面积和 R'' 的面积之间. 如果我们找到了两串能划分成一些矩形的外接区域 R''_n 和内接区域 R'_n 的序列，并且当 n 趋向于无穷大时，R''_n 的面积和 R'_n 的面积具有相同的极限，则 F 的值就完全确定. 追溯到古代，这就是在初等几何中为了描述圆的面积所使用过的"穷举法"[1]. 现在，这种直观思想的精确的数学论述便导致积分概念的产生.

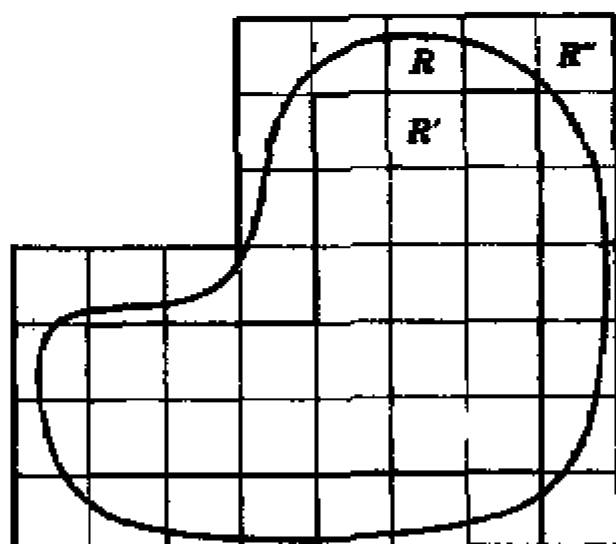


图 2.1 面积的近似法

b. 作为面积的积分

曲线下的面积

当我们将面积同**函数**联系起来时，便产生了积分的分析概念. 让我们来考虑这样一个区域：左、右以垂直线 $x=a$ 和 $x=b$ 为

1) 当然，我们可以使用任何一种内接的和外接的**多边形**，因为多边形能够被划分成一些直角三角形，而直角三角形的面积显然是具有相同边长的矩形面积之半.

界，下面以 x 轴为界，上面以正的连续函数 $f(x)$ 的图形为界（见图 2.2）．这种图形的面积简称为"曲线下的面积"．我们暂且从直观上接受这样的思想：这种区域的面积是一个确定的数．我们将这个面积 F_a^b 称为**函数** $f(x)$ 在积分限 a 和 b 之间的**积分**[1]．我们利用由一些矩形的面积之和来逼近的方法，求出 F_a^b 的数值．为此目的，我们将 x 轴上的区间 $[a, b]$ 分成 n 个（小）部分，称之为**单元**，单元的大小不必相同．在每一个分点上，我们画出 x 轴的垂线，直到曲线 $f(x)$．于是，面积为 F_a^b 的区域被分成 n 个小长条，每一个小长条的边界都是函数 $f(x)$ 的图形的一部分和三个直线段（图 2.3）．

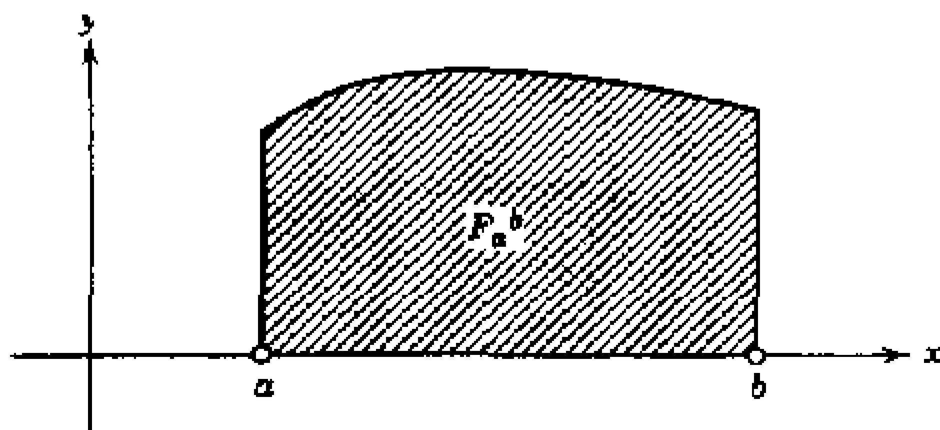


图 2.2

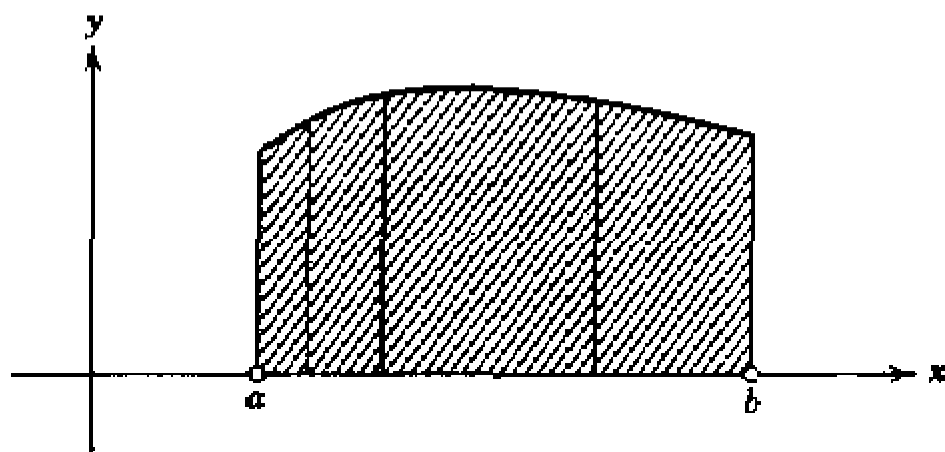


图 2.3

1) 我们把进行积分的区间的边界点称为"积分限"，这并不会引起混淆．

作为和的极限的面积或积分. 计算这种小长条的面积, 显然并不比计算原区域的面积来得容易. 然而, 如果用同底的外接矩形和内接矩形从上面和从下面来近似每一个小长条的面积, 就会前进一步. 这时, 小长条的曲边为水平线段所代替, 此水平线段与 x 轴的距离是 $f(x)$ 在该单元上的最大值或最小值 (图 2.4). 更一般地说, 如果我们用底边相同而顶边是与小长条的曲边相交的任何水平线段的矩形来代替小长条, 则得到中间的近似值 (见图 2.5). 在分析上, 这相当于在每一个单元上都用某一个中间的常数值来代替 $f(x)$. 我们用 F_n 表示此 n 个小矩形面积之和. 直观上可以看出, 如果将区间划分得越来越细, 也就是说, 如果使 n 无限地增大而各单元的最大长度趋向于零, 则数值 F_n 趋向于 F_a^b. 这样 F_a^b 表示这些矩形组成的面积的极限.

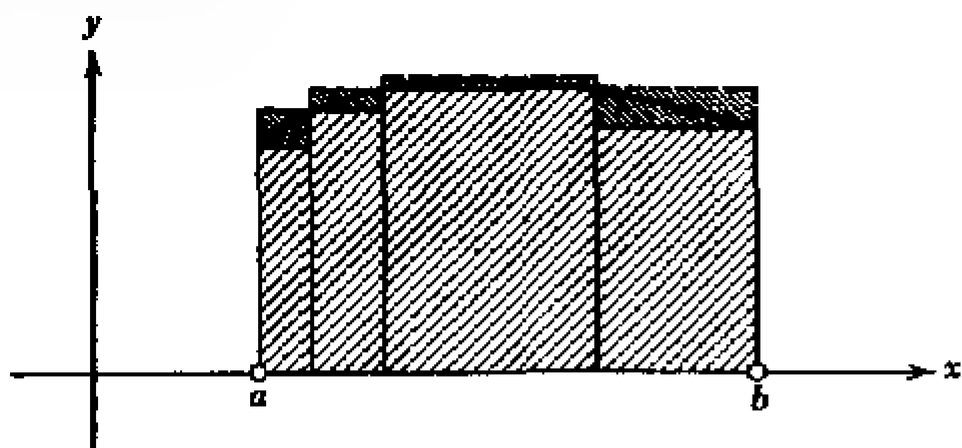


图 2.4

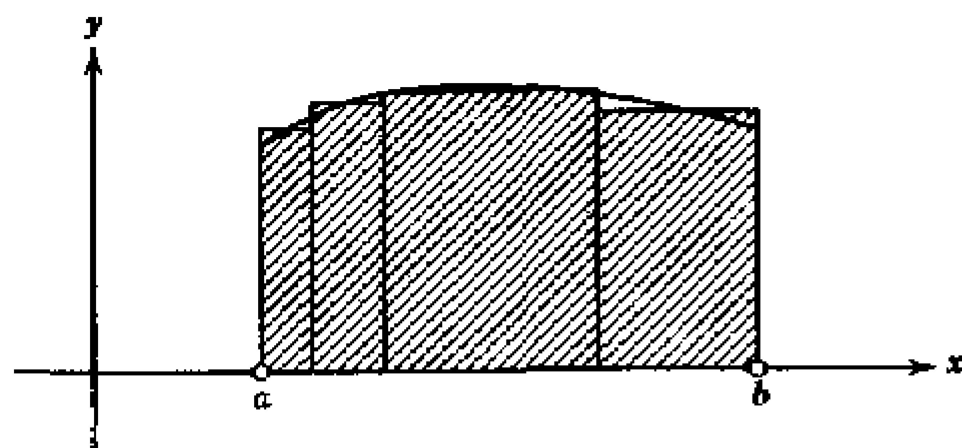


图 2.5

c. 积分的分析定义. 表示法

积分的定义和存在

在上一节中，我们将曲线下的面积理解为直观上给定的量，随后又将它表示为极限值. 现在，我们将这个顺序颠倒过来. 我们不再凭借直觉来认定连续曲线下面的区域的面积；相反，我们将首先用纯分析的方式讨论上面已定义的和 F_n，并且来证明这些和趋向于确定的极限值，然后将这个极限就作为积分或面积的精确的**定义**.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上是连续的（但不一定是正的）我们用 $n-1$ 个分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 将区间分成 n 个相等的或不相等的单元，其长度为

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)^{1)},$$

此外，令 $x_0 = a$ $x_n = b$(见图 2.6) 在每一个闭子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 或单元上，我们随意选取任何一点 ξ_i 然后，作和式

$$\begin{aligned} F_n &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots \\ &\quad + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n. \end{aligned}$$

使用求和记号，我们可以更简洁地记为

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

或

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

---

1) 记号 Δ 不要看成是（乘积）因子，它只是表示取后继变量之值的差. 因此，符号 Δx_i 指的是 x 的相继两值之差 $x_i - x_{i-1}$.

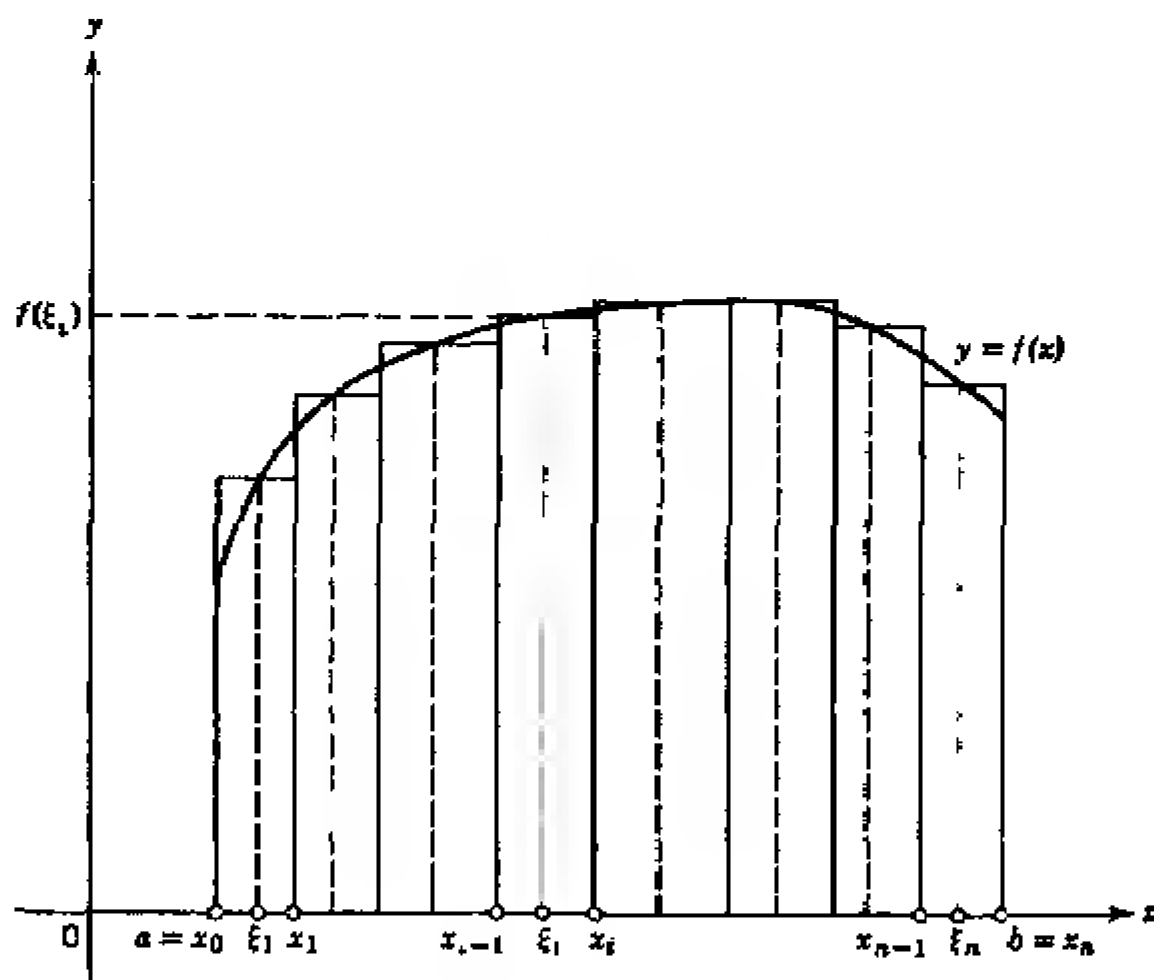


图 2.6

如果 $f(x)$ 是正的，则数值 F_n 表示在每一个子区间上用常数值 $f(\xi_i)$ 代替 f 时所得到的曲线下的面积. 当然，不假设 f 为正，也能建立起和式 F_n. 当子区间的个数无限增加而同时最大的子区间的长度趋向于零时，和 F_n 必定趋向于极限 F_a^b. 这在直观上看来确乎有理；其含意是：极限 F_a^b 之值与分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 以及中间点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的特殊选取方式是无关的. 我们将 F_a^b 称为 $f(x)$ 在积分限 a 和 b 之间的积分.

然而，几何上的直观，不论多么令人信服，也只能作为我们在分析上求极限的过程的引导. 因此，分析证明是需要的，而且必须证明作为上述极限的积分的存在性. 另外，正如已经说过的，我们完全不必要求函数 f 在积分区间上为正的假设.

因此，我们断言：

存在定理 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任何连续函数 $f(x)$ 来说，

在这个区间上的积分作为上述的和 F_n **的极限是存在的(与分点** $x_1,\cdots,x_{n-1}$ **和中间点** $\xi_1,\cdots,\xi_n$ **的选取无关,而只要** Δx_i **的最大长度趋向于零)**

在证明积分的存在(见补篇,第 216 页)以前,我们先来取得一些经验和知识.

积分的莱布尼兹表示法

将积分定义为和的极限,曾促使莱布尼兹用下列符号来表示积分:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

这里,积分号是莱布尼兹时代所使用的长 S 形的求和号的变形.而从单元 Δx_i 过渡到极限,则通过用字母 d 代替 Δ 来表示.但是,在采用这种表示法时,我们绝不要默认 18 世纪的神秘主义的看法:即把 dx 看成"无穷地小"或"无穷小的量",而把积分看成"无穷多个无穷地小的量之和".这样的概念缺乏明晰的含意,并且会使我们在前面准确地表述过的内容模糊不清.从我们现在的观点看来,单独的符号 dx 并没有定义.示意性的符号组合 $\int_a^b f(x)dx$ 是这样定义的:对于区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$,作出的和 F_n 式当 $n\to\infty$ 时所取的极限.

使用怎样的具体符号来表示积分变量,是完全无关紧要的事(正像在和式的表示法中,把什么当作求和指标是没有关系的);我们可以将 $\int_a^b f(x)dx$ 同样地写成 $\int_a^b f(t)dt$,或 $\int_a^b f(u)du$.用 f 表示的**被积函数**是区间 $[a,b]$ 上的自变量的函数,而与自变量的名称是不相干的.只有积分区间的端点 a,b 会影响给定函数 f 的积分之值.像 $\int_a^x f(x)dx$ 或 $\int_a^b f(a)da$ 这样的表达式,其中相同的字母既用来表示积分变量又用来表示区间的端点,在我们的定义下会引起误解,因此开始时应当避免.

若被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是正的，我们就能直接将 $\int_a^b f(x)dx$ 与由 f 的图形和直线 $x=a, x=b, y=0$ 所围成的面积等同起来．然而，在分析上将 f 的积分定义为和 F_n 的极限，对于 f 的符号并未作任何假定．如果 $f(x)$ 在我们考虑的整个区间或其中一部分上是负的，其影响只是使所作的和式中相应的因子 $f(\xi_i)$ 不为正而为负．这时，对于位于 x 轴下面的那一部分曲线围成的区域，我们自然认定是一个负面积．因此，积分将是正项和负项之和，它们分别对应着位于 x 轴上面和下面的曲线部分[1]．(见图 2.7)．

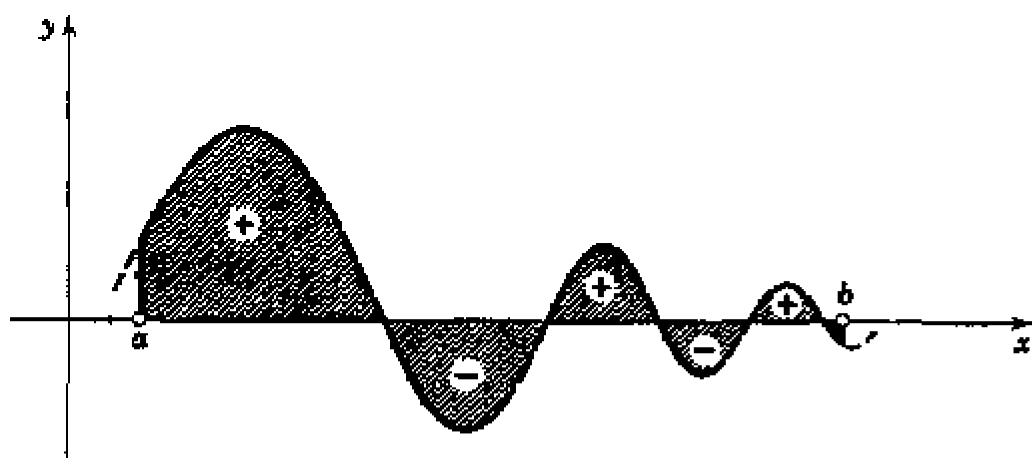


图 2.7

即使函数 $f(x)$ 不是处处连续的，而是在一个点或几个点上具有间断性跳跃，上述极限过程也是收敛的，例如图 2.8 中的曲线所表示的函数，其曲线下的面积显然存在[2]，这在直观上是可信的．

因此，对于具有某些间断性的函数来说，上述极限过程完全有可能使得和式 F_n 存在确定的极限；我们将这种函数称为**可积的**，以表示存在确定极限的可能性． 19 世纪中叶，大数学家黎曼 (B. Riemann) 首先分析了将积分过程应用于一般函数的情况．近来，又引出了积分概念本身的各种扩充．但是，这些改进对于针对在直

1) 由任意封闭曲线围成的区域的面积将在第四章来讨论．

2) 作为另一个例子，我们在 $[-1,1]$ 上考虑 $f(x)=\operatorname{sgn}x$：当 $x<0$ 时，我们有 $f(x)=-1$；当 $x>0$ 时，有 $f(x)=+1$ (见图 2.9)．这时 $\int_{-1}^{+1} f(x)dx=0$．

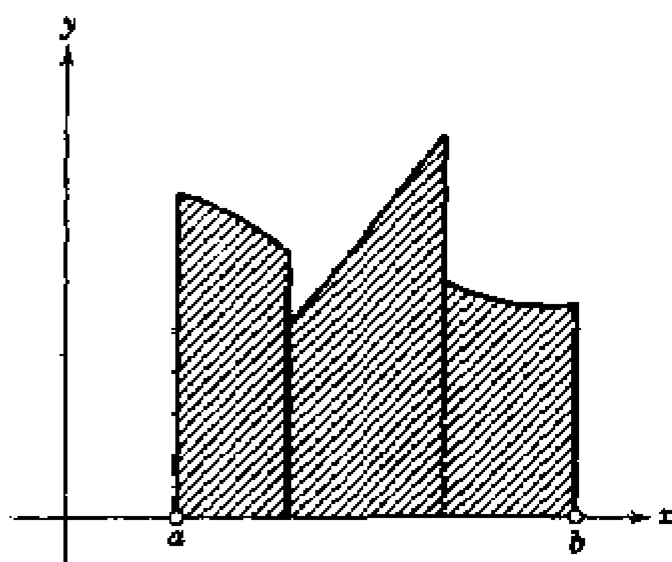


图 2.8

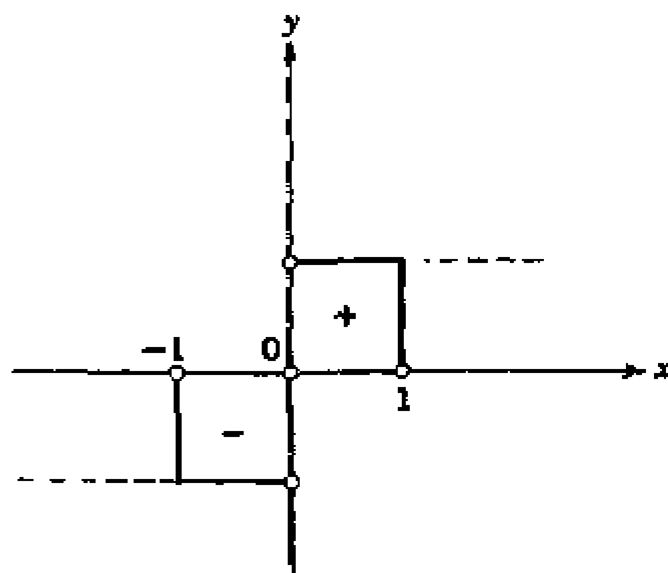


图 2.9

观上可以想见的现象的微积分来说，没有什么直接的重要性．而通过强调所考虑的函数的可积性以提示还能够定义不可积的函数，这对我们来说并不总是必要的．

在高等微积分中，我们这里定义的积分称为黎曼积分，这是为了将它同各种推广的积分概念区别开来．近似和 F_n 称为黎曼和．

2.2 积分的初等实例

有一些基本且重要的函微，我们现在就能通过规定的求极限过程来计算它们的积分．为了做到这一点，我们将适当选取中间点

ξ_i(通常是单元的左端点或右端点)来直接算出和 F_n. 连续函数的积分存在定理保证：对于另选的任何中间点 ξ_i 以及区间的任何划分方式，F_n 的极限是相同的.

a. 线性函数的积分

我们首先来验证：对于在几何学中早已知道的某些简单的图形的面积，积分的确给出了正确的(面积)值.

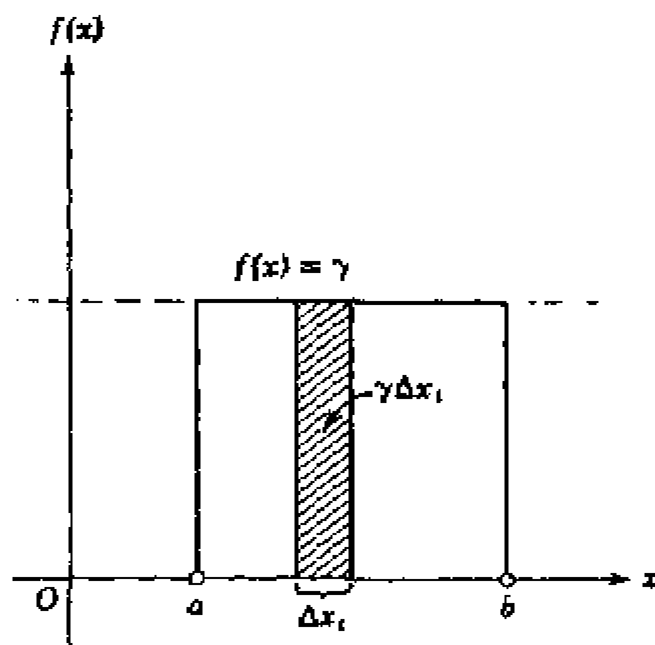


图 2.10　常数函数的积分

设 $f(x)=$ 常数 $=\gamma$, 为了计算 $f(x)$ 在积分限 a 和 b 之间的积分，我们作和式 F_n(见图 2.10). 因为这里 $f(\xi_i)=\gamma$, 我们得到

$$F_n=\sum_{i=1}^{n}\gamma\Delta x_i=\gamma\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\gamma(b-a).$$

因此，同样有

$$\lim_{n\to\infty}F_n=\int_a^b\gamma dx=\gamma(b-a).$$

这正是高为 γ、底为 $b-a$ 的矩形面积的公式.

函数 $f(x)=x$ 的积分

$$\int_a^b x dx$$

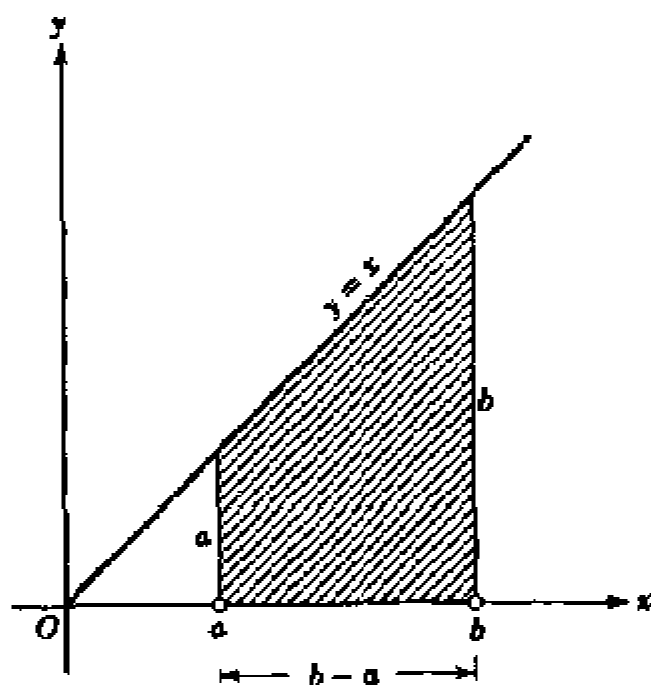


图 2.11

(图 2.11)，正像我们在初等几何中就知道的那样，具有值

$$\frac{1}{2}(b-a)(b+a)=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

为了证实在分析上通过规定的求极限过程也会得到同样的结果，我们把从 a 到 b 的区间用分点

$$a+h, a+2h, \cdots, a+(n-1)h$$

划分为 n 等份，其中 $h=\dfrac{b-a}{n}$. 将每一个子区间的右端点取作 ξ_i，作出和式

$$\begin{aligned}F_n&=(a+h)h+(a+2h)h+\cdots+(a+nh)h\\&=nah+(1+2+3+\cdots+n)h^2\\&=nah+\frac{1}{2}n(n+1)h^2\end{aligned}$$

并取当 $n\to\infty$ 时的极限，我们得到积分，这里我们利用了熟知的算术（等差）级数之和的公式（见第 124 页，问题 3）. 代入 $h=\dfrac{b-a}{n}$，我们看出

$$F_n=a(b-a)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(b-a)^2,$$

由此，立即得到

$$\lim_{n\to\infty} F_n = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

b. x^2 的积分

用初等几何的方法来求函数 $f(x)=x^2$ 的积分，即确定由一段抛物线、一段 x 轴和两条垂直线所围成的区域的面积，并不那么容易．需要确实进行极限过程．假设 $a<b$，我们选取与上例中相同的分点和中间值（见图 2.12）由此便可得到，x^2 在积分限 a 和 b 之间的积分是和式

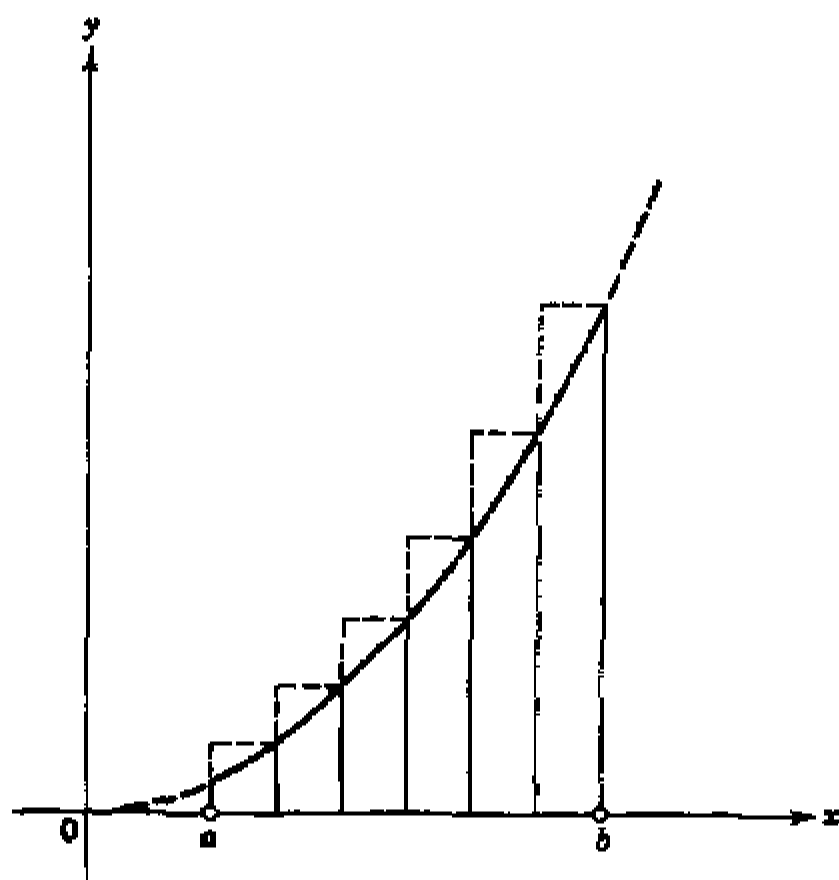


图 2.12　在算术等差级数的分割下抛物线弧下的面积

$$\begin{aligned}F_n &= (a+h)^2h + (a+2h)^2h + \cdots + (a+nh)^2h \\ &= na^2h + 2ah^2(1+2+3+\cdots+n) \\ &\quad + h^3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\end{aligned}$$

的极限；利用上式各括号中求和公式，我们得到

$$
\begin{aligned}
F_n &= na^2h + n(n+1)ah^2 + \frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)]h^3 \\
&= a^2(b-a) + \left(1+\frac{1}{n}\right)a(b-a)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)(b-a)^3.
\end{aligned}
$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 \\
&= \frac{1}{3}(b^3-a^3).
\end{aligned}
$$

于是，当 $a<b$ 时，

$$
\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3).
$$

c. x^α 的积分 (α 是不等于 -1 的整数)

在某些情况下，积分能够用特殊的初等方法来实现，本节下面的一些例题都是为了说明这一点的构造性的例证. 后面，在 2.9 节 d 中，我们还要用一般的方法更简单地得到同样的结果.

我们只要把用于 x 和 x^2 的那种推理方法，同样应用于函数 $x^3, x^4, \cdots$, 便可导出关系式

$$
\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}), \tag{1}
$$

其中 α 是任何正整数；为了证明这一点，只需对于和 $1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha$ 找到一些适当的公式，例如关系式

$$
\lim_{n\to\infty}\left[(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right] = \frac{1}{\alpha+1},
$$

对于 α 运用数学归纳法便可证明此一般式（见第 127 页问题 16）在下一节中，我们将用不同的方法来证明公式 (1)．这种证法具有更大的普遍性并且要简单得多，从而表明下面叙述的这些方法的效力．以后还要将公式 (1) 推广，使之对于除 $\alpha=-1$ 以外的一切实数 α 都成立．

幸好，在选择区间的划分方式方面，积分的定义给我们留有很大的灵活余地，因而为计算上述积分提供了一种非常简单的方法．我们不一定要根据等距分点来求和．相反，我们采用几何级数方式的分点法（图 2.13）

$$a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, aq^n = b$$

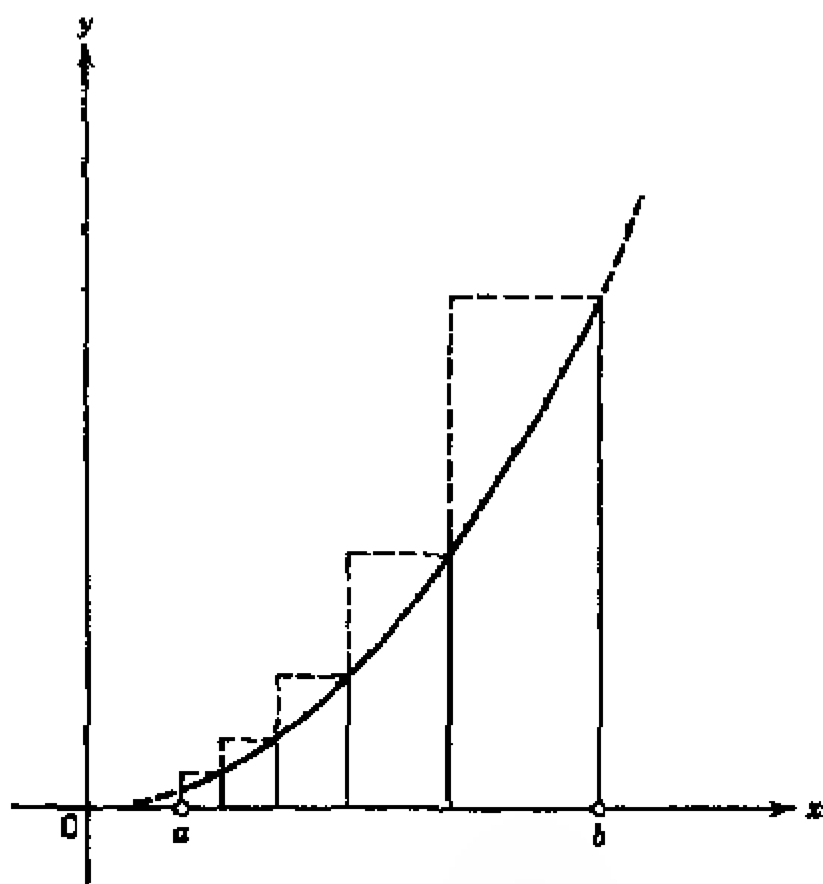


图 2.13　在几何级数方式的分割下

来划分区间 $[a,b]$，其中公比 $q=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$；这时，我们只需计算几何级数之和．如果取 $x_i=aq^i$ 作为分点，则第 i 个单元的长度是

$$\Delta x_i = aq^i - aq^{i-1} = \frac{aq^i(q-1)}{q}.$$

而长度最大的 Δx_i 是最后一个单元：

$$\Delta x_n = \frac{b(q-1)}{q}.$$

当 $n \to \infty$ 时，数 q 趋向于数值 1 (见第 69 页例 d). 因而最大单元的长度 Δx_n 也就是所有单元的长度都趋向于零. 我们仍取每一个单元的右端点 x_i 作为中间点 ξ_i. 和式

$$F_n = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^{\alpha}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(aq^i)^{\alpha}aq^i\frac{q-1}{q}$$
$$= a^{\alpha+1}\frac{q-1}{q}\sum_{i=1}^{n}(q^{1+\alpha})^i \tag{2'}$$

可由公比为 $q^{1+\alpha}$ 的几何级数之和，来求得，即应用熟知的公式 (第 73 页), 我们有

$$F_n = a^{\alpha+1}\frac{q-1}{q}q^{\alpha+1}\frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1}$$
$$= a^{\alpha+1}(q-1)q^{\alpha}\frac{(b/a)^{\alpha+1}-1}{q^{\alpha+1}-1}$$
$$= (b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})q^{\alpha}\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

因为 $q \neq 1$, 所以可以再次利用几何级数之和的公式，即将上式末项中因子写成

$$\frac{q-1}{q^{1+\alpha}-1} = \frac{1}{q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+\cdots+1}$$

而当 $n \to \infty$ 时， q 的各次幂都趋向于 1. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{1}{1+\alpha}(b^{1+\alpha}-a^{1+\alpha}).$$

因此，对于 $0 < a < b$ 和任何正整数 α, 我们就证明了 x^{α} 的积分公式 (1)

对于负整数 α, 如果 $\alpha \neq -1$, 仍可应用类似的方法. 同前面一样, 对于和式 F_n, 可得到

$$
\begin{aligned}
F_n &= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) q^{\alpha} \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \\
&= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \frac{q-1}{q(1-q^{-\alpha-1})},
\end{aligned}
$$

这里我们注意到 $-\alpha$ 是正整数并且大于 1. 再用几何级数的公式, 我们得到

$$
\frac{1}{q}\left(\frac{q-1}{q^{-\alpha-1}-1}\right) = \frac{1}{q^{-\alpha-1}+q^{-\alpha-2}+\cdots+q},
$$

而当 $n \to \infty$ 时, 此式趋向于 $\frac{1}{-\alpha-1}$. 结果, 同前述一样,

$$
\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).
$$

当 $\alpha = -1$ 时, 积分公式 (1) 是没有意义的, 因为这时右端的分子和分母都是零. 对于 $\alpha = -1$ 的情况, 从原来的 F_n 的表达式 (2) 中, 我们算出 $F_n = \frac{n(q-1)}{q}$. 注意到当 $n \to \infty$ 时 $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ 趋向于 1. 于是, 我们得到

$$
\int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) \tag{3}
$$

这里, 右端的极限不能用 a 和 b 的幂来表示, 但能用这些量的对数来表示, 正如后面我们将会看到的那样 (见第 154 页).

d. x^α 的积分 (α 是不等于 -1 的有理数)

前面所得到的结论可以大大推广, 其证明过程并不十分复杂. 令 $\alpha = \frac{r}{s}$ 是正有理数, 其中 r 和 s 是正整数. 这时, 在计算上面给出的积分时, 除了计算 $\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$ 当 q 趋向于 1 时的极限以外, 并没有什么改变. 现在这个表达式不过是 $\frac{q-1}{q^{(r+s)/s}-1}$. 让我们设

$q^{1/s}=\tau(\tau\neq 1)$. 于是，当 q 趋向于 1 时，τ 也趋向于 1. 因此，我们必须求出 $(\tau^s-1)/(\tau^{r+s}-1)$ 当 τ 趋向于 1 时的极限值. 如果将分子和分母同时除以 $\tau-1$，并且同前面一样，用几何级数的公式将它们的形式加以变换，则这个极限就简化为

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{\tau^{s-1}+\tau^{s-2}+\cdots+1}{\tau^{r+s-1}+\tau^{r+s-2}+\cdots+1}.$$

因为分子和分母对于 τ 来说都是连续的，所以代入 $\tau=1$，立即得到这个极限，也就是等于 $\frac{s}{r+s}=\frac{1}{\alpha+1}$；所以，对于每一个正的有理数 α，我们得到积分公式

$$\int_a^b x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}),$$

同 α 为正整数时完全一样.

对于负的有理数 $\alpha=-\frac{r}{s}$，如果 $\alpha\neq -1$（当 $\alpha=-1$ 时，上面所用的几何级数求和的公式失去意义），这个公式也仍然成立.

对于负的 α，我们令 $\alpha=-\frac{r}{s}$，设 $q^{1/s}=\tau$，仍可算出 $\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$ 的极限. 这一点作为练习留给读者.

我们自然会推测到：使上面这个公式成立的范围，还能够推广到无理值 α. 实际上，在 2.7 节（第 174 页）中我们将用十分简单的方法，作为一般理论的结果，来建立对于一切实数 α 的这一积分公式.

e. $\sin x$ 和 $\cos x$ 的积分

我们在这里要用特殊的方法来处理的最后一个例子是 $f(x)=\sin x$ 的积分. 积分

$$\int_a^b \sin x dx$$

显然是和式

$$S_h=h[\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\cdots+\sin(a+nh)]$$

的极限，这个和式是通过将积分区间划分成长度为 $h=\frac{b-a}{n}$ 的单元而得到的．我们将右端的表达式乘以 $2\sin\frac{h}{2}$，并用熟知的三角公式：

$$2\sin u\sin v=\cos(u-v)-\cos(u+v).$$

如果 h 不是 2π 的倍数，我们便得到公式

$$\begin{aligned}S_h&=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right.\\&\quad+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)-\cdots\\&\quad\left.+\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]\\&=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right].\end{aligned}$$

因为 $a+nh=b$，所以积分就成为

$$\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right]$$

当 $h\to 0$ 时的极限．

我们在第一章 (第 91 页) 得知，当 $h\to 0$ 时，表达式 $\frac{h/2}{\sin(h/2)}$ 趋向于 1．于是，所要求的极限就是 $\cos a-\cos b$，因而我们得到积分

$$\int_a^b \sin x dx=-(\cos b-\cos a).$$

类似地，有

$$\int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a \qquad \text{(见第 221 页问题 3)}$$

上面的每一个实例都是用特殊的方法来处理的．然而，系统的积分学和微分学的基本点正在于这样一个事实：我们不是用这种或

那种特殊的方法，而是运用统一的思想方法去直接得到这些结果.为了介绍这些方法，我们首先来介绍一下关于积分的某些一般法则，然后引入导数的概念，最后建立积分和导数之间的联系.

2.3 积分的基本法则

积分的一些基本性质，可从和式的极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

直接推出，这里，区间 $[a,b]$ 被划分成长度为 Δx_i 的子区间或单元，数 ξ_i 表示第 i 个子区间上的任何值，并且要求当 $n\to\infty$ 时长度最大的 Δx_i 趋向于零.

a. 可加性

设 c 是 a 和 b 之间的任一值. 如果我们把积分解释为面积，并且注意到：由若干部分组成的区域，它的面积是各部分的面积之和(图 2.14)，则可得到下列法则：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4}$$

为了进行分析的证明，我们按下述方式划分区间：即把 c 取作分点，譬如说，$c = x_m$ (其中 m 随 n 而改变). 这时，

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中右端的第一个和对应着划分成 m 个单元的区间 $[a,c]$，第二个和对应着划分成 $n-m$ 个单元的区间 $[c,b]$. 现在，当 $n\to\infty$ 时，我们便得到这一积分法则.

到目前为止，我们仅对 $a<b$ 的情况定义了 $\int_a^b f(x)dx$. 当 $a=b$ 或 $a>b$ 时，我们定义积分的方式应使得可加性法则仍然成

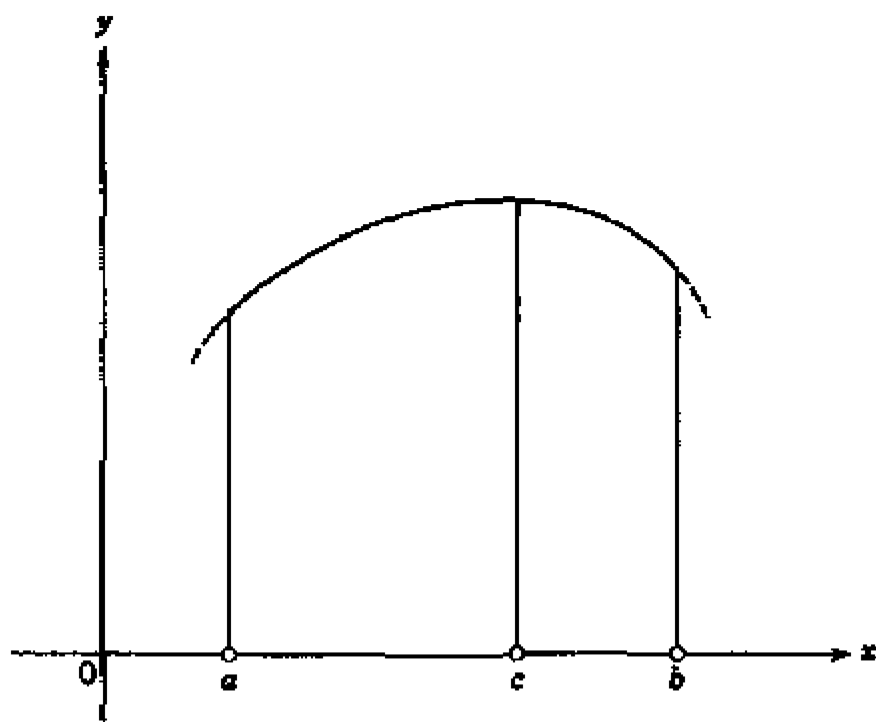


图 2 14

立 因此，当 $c=a$ 时，我们必须定义

$$\int_a^a f(x)dx=0. \tag{5}$$

而当 $b=a$ 时，则推出

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^a f(x)dx=\int_a^a f(x)dx=0.$$

这就使得我们对于 $c<a$ 的情况，要按下列公式来定义 $\int_a^c f(x)dx$:

$$\int_a^c f(x)dx=-\int_c^a f(x)dx, \tag{6}$$

其中，右端具有原来规定的意义．公式 (6) 的几何意义是：如果由积分下限向积分上限移动的方向是使 x 减少的方向，则将曲线 $y=f(x)$ 下的面积看作为负的．看一下前面的积分实例便可确信：将积分限 a 和 b 交换，结果确实会使积分之值变号．

b. 函数之和的积分. 函数与常数乘积的积分

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是任何两个(可积)函数, 则由极限运算的基本定律可知

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i\right\};$$

因此对于两个函数之和得到下列重要法则:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx, \tag{7}$$

对于差, 类似地有

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

此外, 当 α 为任意常数时, 有

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

于是得到

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

最后的两个法则, 使得我们能够对于两个或多个可积的函数的"线性组合"进行积分. 因此, 对于任何二次函数 $y = Ax^2 + Bx + C$,

其中 A, B, C 为任何常数，我们可得

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \int_a^b Ax^2dx + \int_a^b Bxdx + \int_a^b Cdx$$

$$= A\int_a^b x^2dx + B\int_a^b xdx + C\int_a^b 1dx$$

$$= \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a)$$

用同样的方法，可将一般的**多项式**

$$y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

进行积分：

$$\int_a^b ydx = \frac{1}{n+1}A_0(b^{n+1} - a^{n+1}) + \frac{1}{n}A_1(b^n - a^n) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}A_{n-1}(b^2 - a^2) + A_n(b - a).$$

c. 积分的估值

关于积分的另一个可以明显地看到的性质也是很基本的. 即当 $a < b$ 时，对于在区间 $[a, b]$ 的每一点上为正或为零的函数 $f(x)$，有

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{9}$$

如果我们把积分写成和式的极限，并且注意到和式内仅含非负项，则立即可以推出这一结论.

更一般地，如果我们考虑两个函数 f 和 g，它们具有这种性质：对于区间 $[a, b]$ 上的一切 x 来说，$f(x) \geq g(x)$. 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \tag{10}$$

这是因为：$f(x) - g(x)$ 总不为负，所以我们有

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0.$$

现在我们将这一结论用于在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$. 设 f 在这个区间上的最大值为 M, 最小值为 m. 因为对于 $[a,b]$ 中的一切 x 来说，有

$$m \le f(x) \le M,$$

所以，我们得到

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx.$$

如果注意到：对于任何常数 C, 有

$$\int_a^b C dx = C\int_a^b 1dx = C(b-a)$$

我们还可得到不等式

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \tag{11}$$

这个不等式给出了关于任一连续函数的定积分的 (最简单的) 上界和下界.

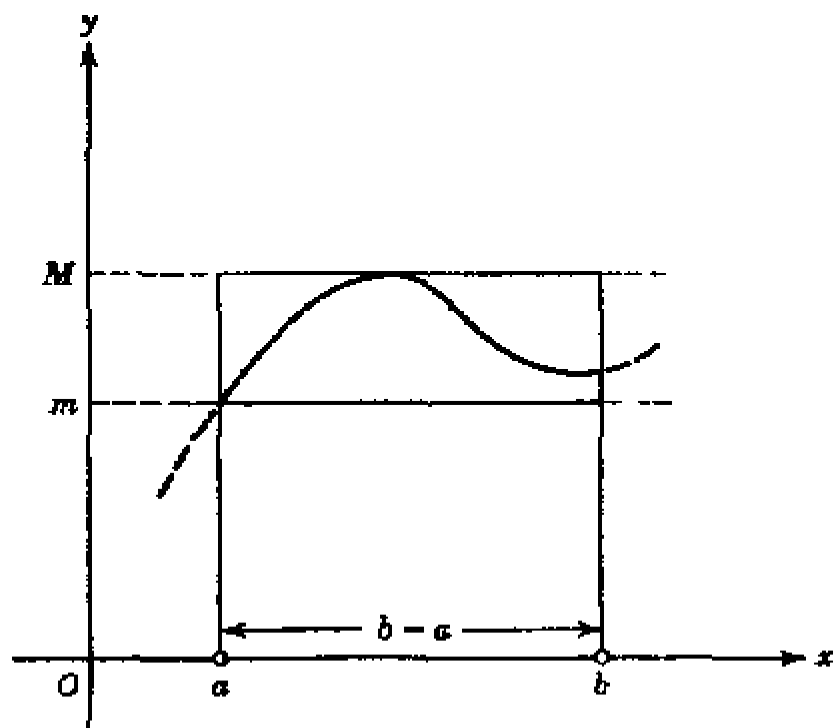


图 2 15

这个估值在直观上也是很明白的. 如果把积分解释为面积, 则量 $M(b-a)$ 和 $m(b-a)$ 分别表示在长度为 $b-a$ 的公共底边上的外接矩形和内接矩形的面积 (图 2.15).

d. 积分中值定理

作为平均值的积分, 上面所得到的不等式, 当我们用函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的平均值来对它作稍不同的解释时是很有意义的. 首先, 对于有限个量 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 来说, 其平均值或算术平均值乃是数

$$\frac{f_1+f_2+\cdots+f_n}{n}.$$

现在, 如果我们想要定义对应于区间 $[a,b]$ 上的任意 x 的无穷多个量 $f(x)$ 的平均值. 那么, 很自然的做法是: 首先取出 (有限的)n 个 f 值, 譬如说 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$, 作平均值

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

然后, 令 n 无限增大而取极限. 这个极限值 (如果总是存在的话), 在很大程度上取决于点 x_i 在区间 $[a,b]$ 上的分布状况. 如果我们把区间 $[a,b]$ 划分成长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}(b-a)$ 的 n 个相等的部分, 而将其中的分点取作为求 f 平均值时的点 x_i, 于是就确定了一个 f 的平均值, 即

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i,$$

而且取当 $n\to\infty$ 时的极限, 则此 n 个量的平均值显然收敛于数值

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}$$

我们将 μ 称为 f 在区间 $[a,b]$ 上的"算术平均值"或平均值. 这样, 前面的不等式只不过是表明: 连续函数的平均值不能大于函数的最大值, 也不能小于其最小值(图 2.16).

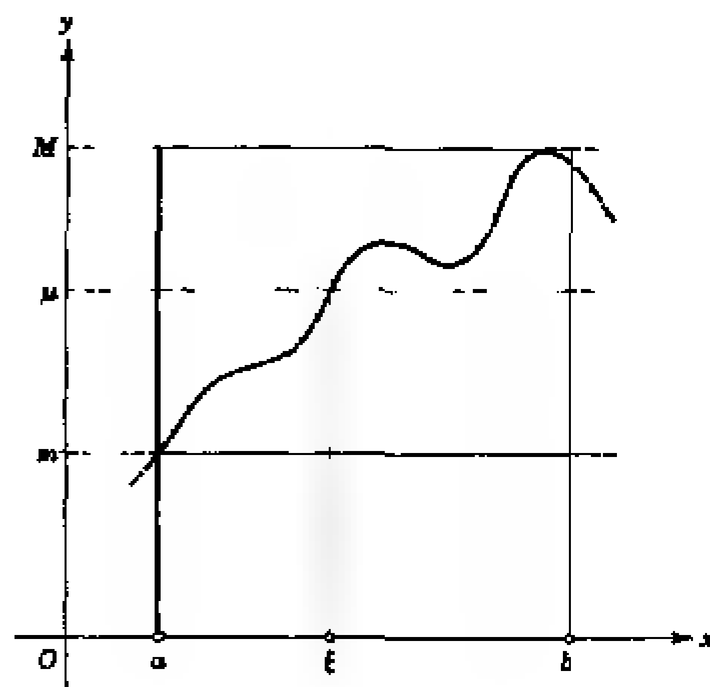


图 2.16

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的, 所以在此区间上必定存在着使得 f 取最大值 M 和最小值 m 的点. 根据连续函数的中间值定理, 在此区间上也必定存在点 ξ, 使得 f 在这一点上正好取中间值 μ. 因此, 我们实际上证明了:

中值定理 对于在区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 在此区间上存在一点 ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{12}$$

这就是既简明然而又是很重要的积分中值定理. 用一句话来概括, 这个定理实质上表明: 连续函数在一个区间上的平均值属于此函数的值域.

这个定理只是保证在区间上至少存在一个 ξ, 使得 $f(\xi)$ 等于 f 的平均值, 而并未进一步说明 ξ 的位置.

注意：如果将积分限 a 和 b 交换，则中值定理的公式仍然成立；因此，当 $a > b$ 时，中值定理也是正确的.

广义中值定理 除简单的算术平均值外，我们还常常需要考虑如下式给出的 n 个量 $f_1, \cdots, f_n$ 的“加权平均值”.

$$\frac{p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_nf_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\mu,$$

其中“权因子”p_i 是任何正值. 例如，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是分别位于 x 轴上点 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的质点的质量，则 μ 表示重心的位置. 如果所有的权因子 p_i 都相等，则量 μ 恰好是上面定义的算术平均值.

对于函数 $f(x)$，我们可以类似地建立在区间 $[a,b]$ 上的加权平均值

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}, \tag{13}$$

其中 $p(x)$ —— **权函数** —— 是此区间上的任一正函数. p 为正的假设保证了分母不为零.

加权平均值 μ, **也位于函数** f **在该区间上的最大值** M **与最小值** m **之间**.

将不等式

$$m \le f(x) \le M$$

乘以**正**函数 $p(x)$，我们得到

$$mp(x) \le f(x)p(x) \le Mp(x).$$

然后积分，得到

$$m\int_a^b p(x)dx \le \int_a^b f(x)p(x)dx \le M\int_a^b p(x)dx.$$

除以正量 $\int_a^b p(x)dx$，我们便得到上述结果

$$m \le \mu \le M.$$

如果这里 $f(x)$ 是连续的，由中间值定理 (第 47 页) 我们便可断言： $\mu = f(\xi)$，其中 ξ 是区间 $a \leq \xi \leq b$ 上的某个适当值. 由此得出下述**广义的积分学中值定理**:

如果 $f(x)$ 和 $p(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续的，而且 $p(x)$ 在此区间上是正的，则在此区间上存在点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi)\int_a^b p(x)dx. \tag{14}$$

在 $p(x) = 1$ 的特殊情况下，便得到前面的中值定理.

2.4 作为上限之函数的积分 —— 不定积分

定义和基本公式

函数 $f(x)$ 的积分值依赖于积分限 a 和 b，即积分是两个积分限 a 和 b 的函数. 为了比较严密地讨论对于积分限的这种依赖关系，我们设想：下限是一个固定的数，譬如说 α，积分变量不再用 x 而用 u 来表示 (见第 141 页)，上限不再用 b 而用 x 来表示，以便说明我们把上限看成变量，并且希望作为这个上限的函数来研究积分之值. 于是，我们写为

$$\varphi(x) = \int_\alpha^x f(u)du.$$

我们将函数 $\varphi(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的一个**不定积分**. 在"不定积分"前面加上"一个"二字，是为了使我们想到：当下限不取 α 而取任何其他值的时候，一般就会得到不同的积分值. 在几何上，不定积分 $\varphi(x)$ 是在曲线 $y = f(u)$ 下并界于 u 轴、直线 $u = \alpha$ 和变动的直线 $u = x$ 之间的面积 (如图 2.17 中的阴影部分所示) 来表示的，其符号由前面讨论过的规则来确定 (第 141 页).

任何特定的**定**积分都能由不定积分 $\varphi(x)$ 求得. 实际上，根据

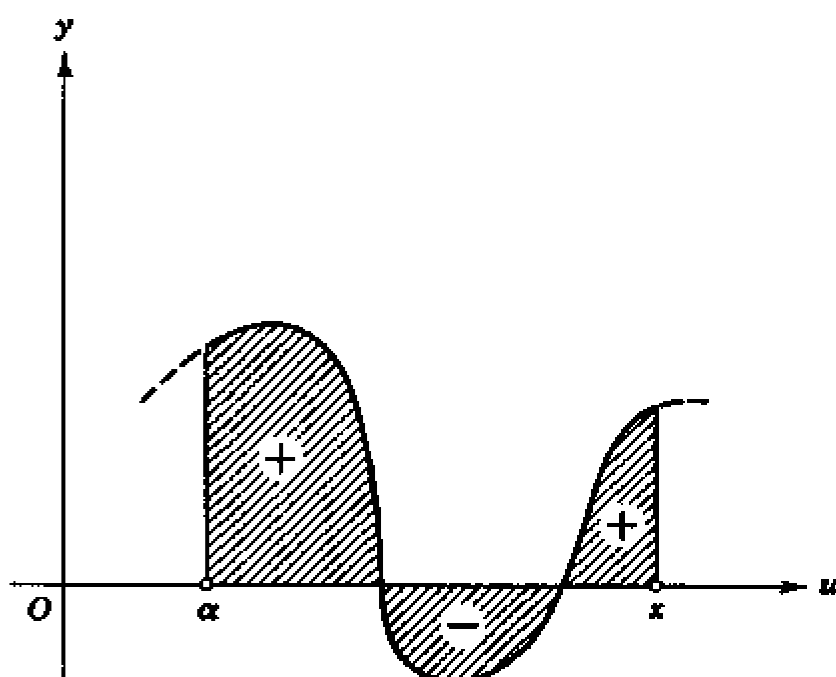


图 2.17　作为面积的不定积分

前面讲过的积分的基本法测,

$$\int_a^b f(u)du = \int_a^\alpha f(u)du + \int_\alpha^b f(u)du$$
$$= -\int_\alpha^a f(u)du + \int_\alpha^b f(u)du - \varphi(b) - \varphi(a)$$

特别是, 我们能够通过 $\varphi(x)$ 来表示下限为 α' 的任何其他的不定积分:

$$\int_{\alpha'}^x f(u)du \quad \varphi(x) \quad \varphi(\alpha').$$

正如我们所看到的, **任何不定积分与特定的不定积分** $\varphi(x)$ **仅仅相差一个常数**.

不定积分的连续性

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 α 是此区间上的一个点, 则不定积分

$$\varphi(x) - \int_\alpha^x f(u)du$$

仍然表示定义在同一区间上的 x 的函数. 不难看出, **连续函数** $f(x)$ **的不定积分** $\varphi(x)$ **同样是连续的**. 因为, 如果 x 和 y 是该区间上的

任何两个值，那么，根据中值定理，我们有

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\int_x^y f(u)du=f(\xi)(y-x), \tag{15}$$

其中 ξ 是端点为 x 和 y 的区间上的某一个值. 这时，由 f 的连续性，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x}\varphi(y)&=\lim_{y\to x}[\varphi(x)+f(\xi)(y-x)]\\&=\varphi(x)+f(x)\cdot 0=\varphi(x),\end{aligned}$$

这就证明 $\varphi(x)$ 是连续的. 更具体地说，在任何闭区间上，我们有 $|\varphi(y)-\varphi(x)|<M|y-x|$，其中 M 是 $|f(x)|$ 在该区间上的最大值，因此，φ 甚至是利普希茨连续的.

对于 $\varphi(y)-\varphi(x)$ 的公式 (15)，说明当 $f(x)$ 在整个区间上为正时，$\varphi(x)$ 是增函数，即当 $y>x$ 时，

$$\varphi(y)=\varphi(x)+f(\xi)(y-x)>\varphi(x).$$

建立函数的不定积分，乃是**产生新的函数类**的一种重要方式. 在 2.5 节中，我们将应用这种方式引入对数函数. 这也将使我们初次看到一个事实：由数学分析的一般定理可以导致许多非常特殊的公式.

正如在 3.14 节 a（第 334 页）中将会看到的那样，如果我们希望根据纯分析的方法而不是依靠直观的几何解释来定义新函数（例如定义三角函数），那么，借助于已定义的函数的积分则是一种很好的途径.

2.5 用积分定义对数

a. 对数函数的定义

在 2.2 节中，我们已经成功地通过 a 和 b 的幂来表示 $\int_a^b x^\alpha dx$，其中 α 为任一个不等于 -1 的有理数. 当 $\alpha=-1$ 时，我们只能将

这个积分表示为序列的极限：

$$\int_a^b \frac{1}{u}du = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right).$$

现在，与 2.2 节的讨论无关，我们**引入**由不定积分

$$\int_1^x \frac{1}{u}du^{1)},$$

所表示的函数，或者在几何上，由如图 2.18 所示双曲线下的面积

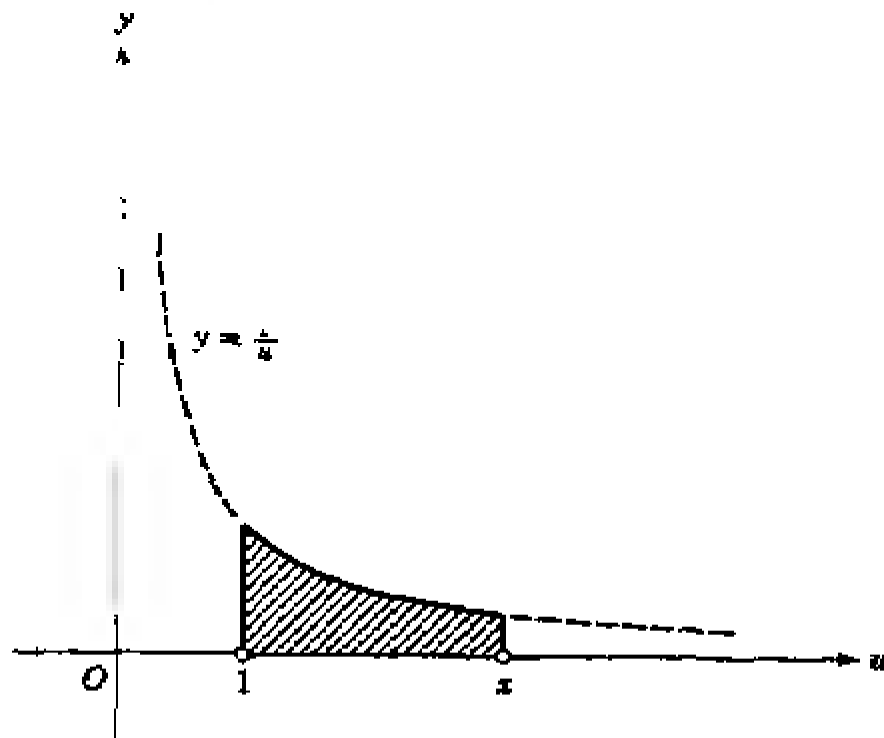


图 2.18 由面积表示的 $\log x$

所表示的函数．我们将此函数称为 x 的对数，或者更确切地说，称为 x 的自然对数，并且记为

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{u}du. \tag{16}$$

因为 $y=\frac{1}{u}$ 是连续函数，并且对于一切 $u>0$ 是正函数，所以函数 $\log x$ 对于一切 $x>0$ 有定义，并且是连续的，此外还是单调增

1) 在本节中，我们仍随意利用这一事实：连续函数（这里是函数 $\frac{1}{u}$）的积分是存在的，其一般证明在补篇中给出．

加的. 将 $\log x$ 的不定积分的下限取为 1 是很方便的, 这意味着

$$\log 1 = 0, \tag{17}$$

并且当 $x > 1$ 时 $\log x$ 是正的, 而当 x 位于 0 与 1 之间时 $\log x$ 是负的 (图 2.19). $\frac{1}{u}$ 在正的积分限 a 和 b 之间的任一定积分都能按下列公式通过对数来表示 (见第 164 页):

$$\int_a^b \frac{1}{u} du = \log b - \log a. \tag{18}$$

在几何上, 这个积分表示双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 下的界于直线 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的面积.

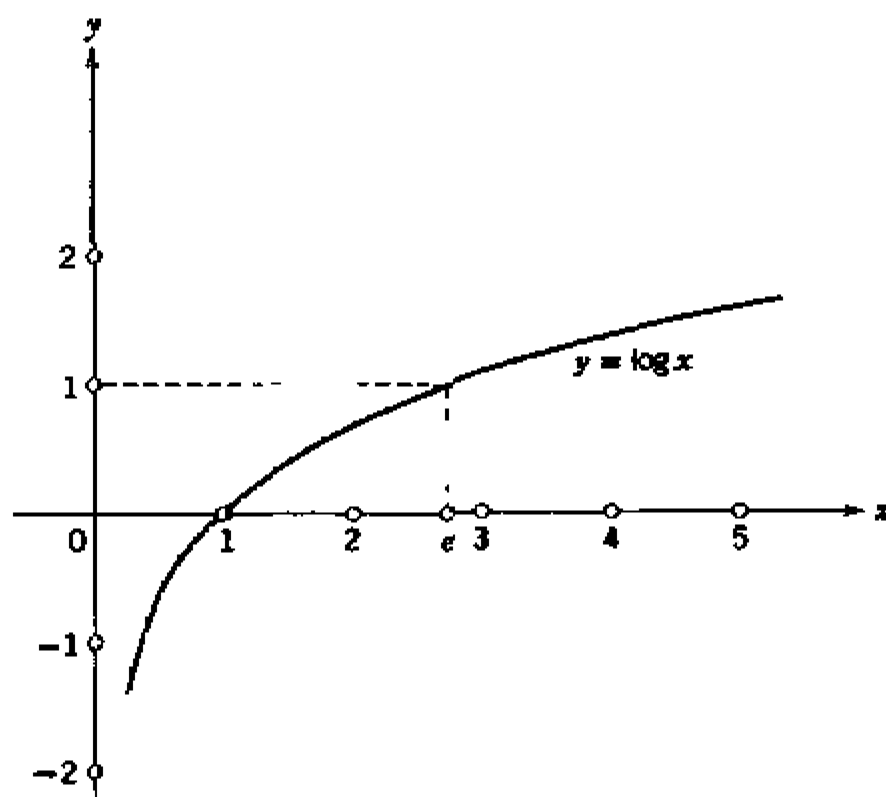


图 2.19 自然对数

b. 对数的加法定理

一个用来解释 $\log x$ 的传统名称的基本性质, 可由下述定理来表述:

加法定理 对于任何正的 x 和 y，有

$$\log(xy) = \log x + \log y. \tag{1}$$

证明. 我们将加法定理写成下列形式

$$\log(xy) - \log y = \log x$$

或

$$\int_y^{xy} \frac{1}{v}\,dv = \int_1^x \frac{1}{u}\,du,$$

这里，我们有意选用不同的字母来表示这两个积分的积分变量. 这两个积分所以相等可由下述事实推出：当适当地划分和选择中间点时所得到的两个近似和具有相同的值. 首先假设 $x > 1$. 于是

$$\int_1^x \frac{1}{u}\,du = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\,\Delta u_i,$$

其中 $u_0 = 1, u_1, u_2, \cdots, u_n = x$ 表示划分区间 $[1, x]$ 时所得到的各点，ξ_i 处于第 i 个单元上. 令 $v_i = yu_i, \eta_i = y\xi_i$，我们看到：点 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 对应着区间 $[y, xy]$ 的一种划分，其中间点为 $\eta_i = \xi_i y$. 显然

$$\Delta v_i = y\Delta u_i,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i}\,\Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\,\Delta u_i.$$

当 n 趋向于无穷大时，对于 $x > 1$ 的情况，我们便得到所要求的两个积分之间的恒等式.

当 $x = 1$ 时，加法定理显然成立，因为 $\log 1 = 0$. 对于 $0 < x < 1$ 的情况，为了证明这个定理也是对的，我们注意到：这时 $\dfrac{1}{x} > 1$，

因此

$$
\begin{aligned}
\log x + \log y &= \log x + \log\left(\frac{1}{x}xy\right) \\
&= \log x + \log\frac{1}{x} + \log(xy) \\
&= \log\frac{1}{x} + \log x + \log(xy) \\
&= \log\left(\frac{1}{x}x\right) + \log(xy) \\
&= \log 1 + \log(xy) = \log(xy).
\end{aligned}
$$

加法定理的证明到此完成.

加法定理也可根据公式 (3) (第 150 页) 来证明, 按此公式, 有

$$\log x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

于是

$$
\begin{aligned}
\log(xy) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{xy} - 1) \\
&= \lim_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{x} - 1)\sqrt[n]{y} + n(\sqrt[n]{y} - 1)] \\
&= [\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)](\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y}) + \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{y} - 1) \\
&= \log x + \log y,
\end{aligned}
$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y} = 1$(见第 69 页).

将加法定理应用于特殊情况 $y = \dfrac{1}{x}$, 便得到

$$\log 1 = \log x + \log\frac{1}{x}$$

或

$$\log\frac{1}{x} = -\log x. \tag{20}$$

更一般地有

$$\log\frac{y}{x} = \log y + \log\frac{1}{x} = \log y - \log x. \tag{21}$$

对于 n 个因子的乘积，我们重复应用加法定理，便得到

$$\log(x_1 x_2 \cdots x_n) = \log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n.$$

特别是，对于任何正整数 n，我们得到

$$\log(x^n) = n \log x \tag{22}$$

这个恒等式当 $n = 0$ 时也成立，因为 $x^0 = 1$；并且还可以推广到负整数 n 的情况，只需注意到

$$\log(x^n) = \log\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\log(x^{-n}) = -(-n)\log x = n \log x.$$

对于任何有理数 $\alpha = \frac{m}{n}$ 和任何正数 a，我们可做 $a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = x$. 这时，我们有

$$\log x = \frac{1}{n}\log x^n = \frac{1}{n}\log a^m = \frac{m}{n}\log a = \alpha \log a.$$

因此，对于任何正实数 a 和任何有理数 α，恒等式

$$\log(a^\alpha) = \alpha \log a \tag{23}$$

都成立.

2.6 指数函数和幂函数

a. 数 e 的对数

在第 86 页上作为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限而得到的常数 e，对于函数 $\log x$ 起着极为重要的作用. 实际上，数 e 的特征由等式[1]

$$\log e = 1$$

---

1) 在几何上，这意味着：由双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 和直线 $y = 0, x = 1$ 以及 $x = e$ 围成的面积之值为 1(见图 2.18).

便可得知．为了证明这个等式，我们注意到：由函数 $\log x$ 的连续性可以推出

$$\log e = \log\left[\lim_{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

现在根据积分学中值定理，有

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_{1}^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{u}du = \frac{1}{\xi}\frac{1}{n},$$

其中 ξ 是 1 和 $1+\frac{1}{n}$ 之间的某一个数，这个数与 n 有关．显然，$\lim_{n\to\infty}\xi = 1$，于是

$$\log e = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\xi} = 1. \tag{24}$$

b. 对数函数的反函数．指数函数

由关系式 $\log e = 1$，则对于任何有理数 α，就可以推出

$$\log(e^{\alpha}) = \alpha\log e = \alpha.$$

这说明每一个有理数 α，可以写成某一个正数 x 的 $\log x$ 之值．因为 $\log x$ 是连续的，所以它可以取介于两个有理值之间的任何值；这意味着它可取一切实数值．由此可知，当 x 取遍一切正值时，$y=\log x$ 之值遍及一切实数 y．因为 $\log x$ 是单调递增的，所以对于任何实数 y 正好存在一个正数 x，使得 $\log x = y$．方程 $y=\log x$ 的解 x，可由对数函数的反函数给出，我们将此反函数记为 $x=E(y)$．于是，我们知道，$E(y)$(图 2.20) 对于一切 y 有定义并且是正的．此外，它仍然是连续的和增加的 (见第 49 页)．

因为方程 $y=\log x$ 和 $x=E(y)$ 代表 x 和 y 之间的相同的关系，所以我们也可将方程 $\alpha=\log(e^{\alpha})$(此方程对于有理数 α 成立) 写成下列形式：

$$E(\alpha) = e^{\alpha}.$$

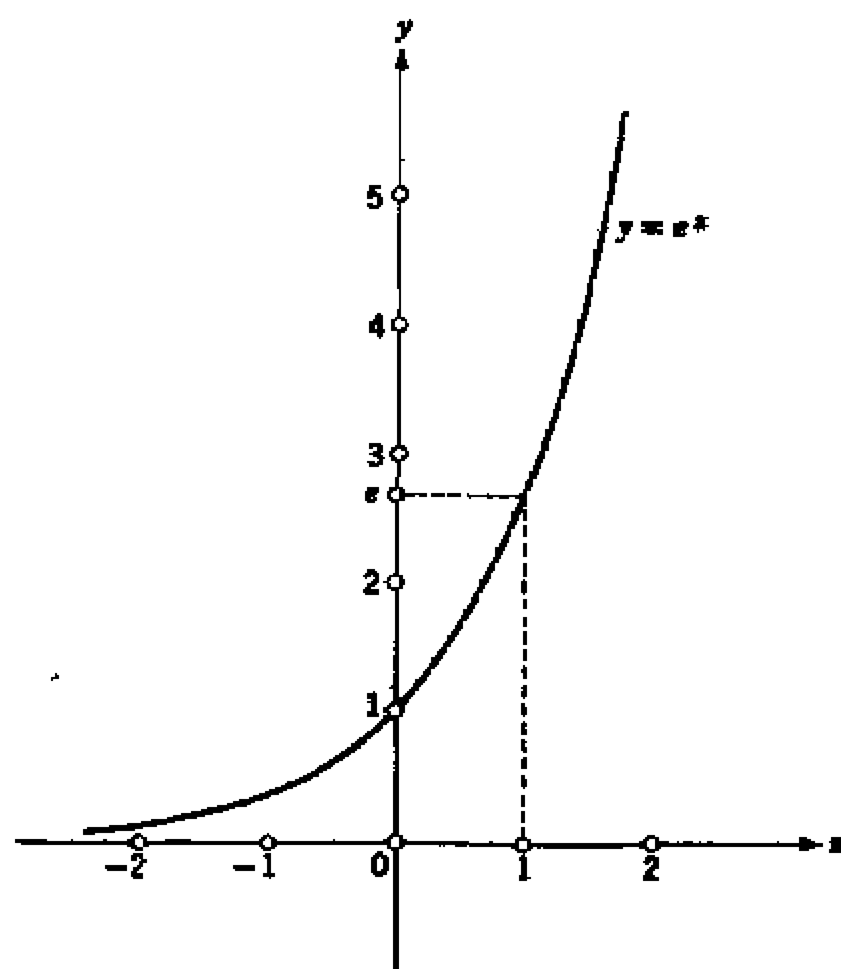


图 2.20 指数函数

我们看出：对于任何有理数 α, $E(\alpha)$ 之值是数 e 的 α 次幂. 对于有理数 $\alpha=\frac{m}{n}$, 幂 e^{α} 直接定义为 $\sqrt[n]{e^m}$. 对于无理数 α, 这样来定义 e^{α} 是非常自然的：即将 α 表示为有理数列 α_n 的极限，并且设 $e^{\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\alpha_n})$. 因为 $e^{\alpha_n}=E(\alpha_n)$, 且函数 $E(y)$ 连续地依赖于 y, 所以我们可以确信 e^{α_n} 的极限存在，并且具有值 $E(\alpha)$, 而与用来逼近 α 的特定序列是无关的. 这就证明了方程 $E(\alpha)=e^{\alpha}$ 对于无理数 α 也成立. 现在，对于一切实数 α, 我们能够用 e^{α} 来代替 $E(\alpha)$. 我们称 e^x 为指数函数. 这个函数对于一切 x 有定义并且是连续的，此外还是单调增加的和处处为正的.

因为方程 $y=\log x$ 和 $x=e^y$ 是表示数 x 和 y 之间的同样关系的两种方式，所以我们看出，$\log x$ —— x 的"自数对数"(上如由积分所定义的) 是代表**以e为底的对数**, 如采用初等数学中的术语，也就是说，$\log x$ 是 e 的这样一个幂指数：e 的 $\log x$ 次幂等

于 x, 或

$$e^{\log x} = x \tag{25}$$

我们可以写成[1] $\log x = \log_e x$.

类似地, $x = e^y$ 是这样一个数、其对数为 y, 或

$$\log e^y = y. \tag{26}$$

从微积分的观点来看, 如前所述, 首先作为一个简单的函数 $y = \frac{1}{x}$ 的积分引入自然对数, 然后通过取对数函数的反函数来定义 e 的幂, 的确是比较容易的. 这里, 函数 $\log x$ 和 e^x 的连续性和单调性正是作为一般定理的推论而得到的, 并不需要特别的论证.

c. 作为幂的极限的指数函数

原来, 数 e 是作为下列极限而得到的:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

更一般的公式是对于任何 x, 将 e^x 表示为极限

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{27}$$

为了证明这一点, 只需证明序列

$$s_n = \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

具有极限 x 即可, 因为指数函数是连续的, 此时数列

$$e^{s_n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

必定趋向于 e^x. 现在

$$s_n = n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = n\int_1^{1+\frac{x}{n}}\frac{1}{\xi}d\xi.$$

---

1) 读者可能会感到应该保留"自然对数"这一名称给以 10 为底的对数. 然而, 在历史上, 1614 年由纳皮尔 (Napier) 发表的第一个对数表本来给出的是以 e 为底的对数. 以 10 为底的对数是后来由布里格斯 (Briggs) 引入的, 原因是以 10 为底的对数在计算上显然是方便的. (以 10 为底的对数称为常用对数. —— 译者注)

根据积分中值定理，我们有

$$s_n = n\frac{1}{\xi_n}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)-1\right]=\frac{x}{\xi_n},$$

其中 ξ_n 是 1 与 $1+\dfrac{x}{n}$ 之间的某一个值. 因为当 n 趋向于 ∞ 时，ξ_n 显然趋向于 1，所以我们的确有 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

d. 正数的任意次幂的定义

现在，我们能够通过指数函数和对数函数来表示任一正数的任意次幂 [1].

我们已经看到，对于有理数 α 和任何正数 x，关系式

$$\log(x^\alpha) = \alpha\log x$$

成立. 我们将此式写为下列形式：

$$x^\alpha = e^{\alpha\log x}.$$

对于无理数 α，我们仍将 α 表示为有理数序列 α_n 的极限，并且定义

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha_n\log x}$$

由指数函数的连续性又可得知此极限存在，且其值为 $e^{\alpha\log x}$，因为

$$e^{\alpha\log x} = e^{\lim(\alpha_n\log x)} = \lim e^{\alpha_n\log x}.$$

因此，对于任何数 α 和任何正数 x 这种极其一般的情形，关系式

$$x^\alpha = e^{\alpha\log x} \tag{28}$$

都是成立的. 设 $\log x = \beta$，或者同样地，$x = e^\beta$，我们推出

$$(e^\beta)^\alpha = e^{\alpha\beta}, \tag{29}$$

---

1) 这就避免了第 94 页上所指出的比较笨拙的"初等"定义，也避免了通过有理指数过渡到极限的方法来证明这些过程.

更一般地，对于任何正数 x，有

$$(x^\alpha)^\beta = (e^{\alpha \log x})^\beta = e^{\alpha\beta \log x} = x^{\alpha\beta}.$$

不难建立幂函数运算的另一个一般的法则，这就是**乘法定理**

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

其中 x 是正数，α 和 β 是任意数. 为证明这一定理，只需证明对等式两端取对数后而得到的公式：

$$\log(x^\alpha x^\beta) = \log(x^{\alpha+\beta}).$$

现在由已建立的法则 (19), (26) 和 (28), 可以推出

$$\begin{aligned}\log(x^\alpha x^\beta) &= \log x^\alpha + \log x^\beta = \log(e^{\alpha \log x}) + \log(e^{\beta \log x})\\ &= \alpha \log x + \beta \log x = (\alpha + \beta) \log x\\ &= \log(e^{(\alpha+\beta)\log x}) = \log(x^{\alpha+\beta}).\end{aligned}$$

e. 任一底的对数

我们不难通过自然对数来表示非 e 为底的对数. 如果对于正数 a，方程 $x = a^y$ 成立，我们则写为

$$y = \log_a x.$$

现在 $a^y = e^{y \log a}$，因此 $x = e^{y \log a}$ 或 $y \log a = \log x$. 由此推出

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \tag{30}$$

其中 $\log x$ 是以 e 为底的自然对数. 特别是以 10 为底的常用对数由下式给出：

$$\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10}.$$

因为以任何数 a 为底的对数同自然对数成正比，所以这样的对数也满足同样的加法定理：

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

2.7 x 的任意次幂的积分

在 2.2 节中我们曾经得到公式

$$\int_a^b u^\alpha du = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

其中 α 为任一不等于 -1 的有理数．（已经看到 $\alpha = -1$ 的情况得到对数．）当 α 是无理数时，为了计算这个定积分，只需讨论不定积分

$$\varphi(x) = \int_1^x u^\alpha du$$

即可，因为一切具有正的积分限 a 和 b 的定积分都能从这个不定积分得到．假设 $x > 1$（$x < 1$ 的情况，只要把积分限交换，便可用同样方法来处理）．这时，由 (28) 我们有

$$u^\alpha = e^{\alpha \log u},$$

这里，对于积分区间中的 u 来说，$\log u \geq 0$．设 β 和 γ 是任何两个不等于 -1 的有理数，并且

$$\beta \leq \alpha \leq \gamma.$$

于是有

$$\beta \log u \leq \alpha \log u < \gamma \log u$$

因为指数函数是递增的，所以由上式可以推出

$$e^{\beta \log u} < e^{\alpha \log u} \leq e^{\gamma \log u};$$

$$u^{\beta} < u^{\alpha} \leq u^{\gamma}$$

于是我们有

$$\int_1^x u^{\beta} du \leq \varphi(x) \leq \int_1^x u^{\gamma} du.$$

u^{β} 和 u^{γ} 的积分前面已经算出，从而得到

$$\frac{1}{\beta+1}(x^{\beta+1} - 1) \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{\gamma+1}(x^{\gamma+1} - 1).$$

现在如果我们令有理数 β 和 γ 都收敛于 α，那么由于指数函数的连续性，$x^{\beta+1} = e^{(\beta+1)\log x}$ 和 $x^{\gamma+1} = e^{(\gamma+1)\log x}$ 都趋向于 $e^{(\alpha-1)\log x} = x^{\alpha+1}$，于是我们得到极限

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1} - 1).$$

对于 0 和 1 之间的 x，也有同样的结果．因此，对于正数 a 和 b，一般地有

$$\int_a^b u^{\alpha} du = \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{1}{\alpha-1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

正如在有理数 α 时一样．

如果 α 是正整数，那么这个公式甚至在积分限 a 或 b 是零或负数时也仍然成立；公式的这一直接推广并不困难．

2.8 导　　数

导数的概念与积分的概念一样，也有着直觉的起源并且是不难掌握的．然而，这一概念却打开了通向数学知识与真理的巨大宝库之门；读者将会逐渐发现本书中所阐述的这些方法的各种重要应用及其威力．

导数的概念首先是由**光滑曲线** $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的**切线**的直觉观念的启发而提出的．而此曲线的切线是由切线方向同

正 x 轴之间的夹角 α 来表征的. 但是, 我们怎样由函数的解析表达式得到这个角 α 呢? 为了确定角 α, 仅仅知道点 P 处的 x 和 y 之值是不够的, 因为除了切线以外, 还有无穷多条不同的直线通过点 P. 另一方面, 为了确定角 α, 我们并不需要知道函数 $f(x)$ 在整个定义域上的性态; 只要知道函数 $f(x)$ 在点 P 的任意的邻域内的性态, 便足以确定角 α, 而不论邻域选得多么小. 这就表明, 我们应当通过极限过程来定义曲线 $y=f(x)$ 的切线方向. 这正是我们下面要遵循的途径.

早在 16 世纪, 由于要解决几何学、力学和光学中产生的最优化问题, 即极大值和极小值问题, 在数学家们面前就提出了计算切线方向的问题或"微分"的问题. (关于这些问题的讨论, 见 3.6 节.)

导数微分法产生的另一个最重要的问题, 是对于任一作非匀速运动的物体的速度的直观概念赋予精确的数学意义的问题 (见第 183 页).

让我们首先讨论在分析上用极限过程来描述曲线的切线的问



a. 导数与切线

几何定义 为了与朴素的直观相一致, 我们首先通过下述几何上的求极限过程来定义给定曲线 $y=f(x)$ 在其一点 P 上的切线 (见图 2.21). 取曲线上点 P 附近的另一点 P_1. 通过这两点 P, P_1 画一条直线 —— 曲线的割线. 现在, 如果点 P_1 沿曲线向点 P 移动, 则可料到这条割线将达到极限位置, *此极限位置与 P_1 从哪一侧而趋向于 P 是无关的*. 这个割线的极限位置便是切线; 割线的这种极限位置的*存在性*这一命题, 与曲线在点 P 处具有确定的切线或确定的方向的假设是等价的 (我们使用"假设"一词, 是因为实际上我们已经做了这样的假设). 在曲线的每一点上都存在切线的假设, 决不是对于所有 (表示简单的函数) 的曲线都成立. 例如,

在点 P 处具有隅角或尖点的任何曲线，实际上在这些地方都没有唯一确定的方向，例如 $y=|x|$ 定义的曲线在 $(0,0)$ 处的情形．（见第 188 页上的讨论）．

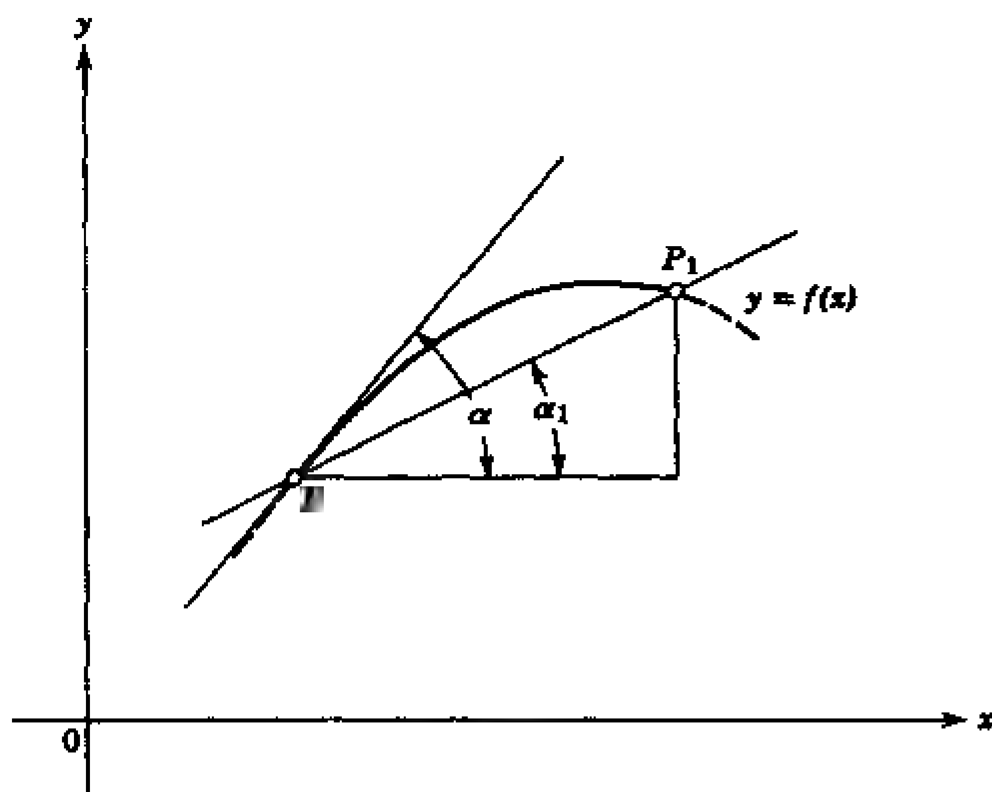


图 2.21　割线和切线

因为我们所考虑的曲线是通过函数 $y=f(x)$ 来表示的，所以我们还必须针对 $f(x)$ 用分析方法来表述这一几何上的极限过程．这种分析上的极限过程称为 $f(x)$ 的**微分法**．

我们知道一条直线同 x 轴构成的夹角是这样规定的，就是把正 x 轴沿正方向即反时针方向[1]转动，并在首次变得与该直线平行时所必须扫过的角．（这个角 α 应位于区间 $0\le\alpha<\pi$ 之中．）设 α_1 是割线 PP_1 同正 x 轴构成的夹角（见图 2.22），α 是切线同正 x 轴构成的夹角．于是

$$\lim_{P_1\to P}\alpha_1=\alpha,$$

1）沿这样的方向，正 x 轴转动 $\frac{\pi}{2}$ 就与正 y 轴重合．

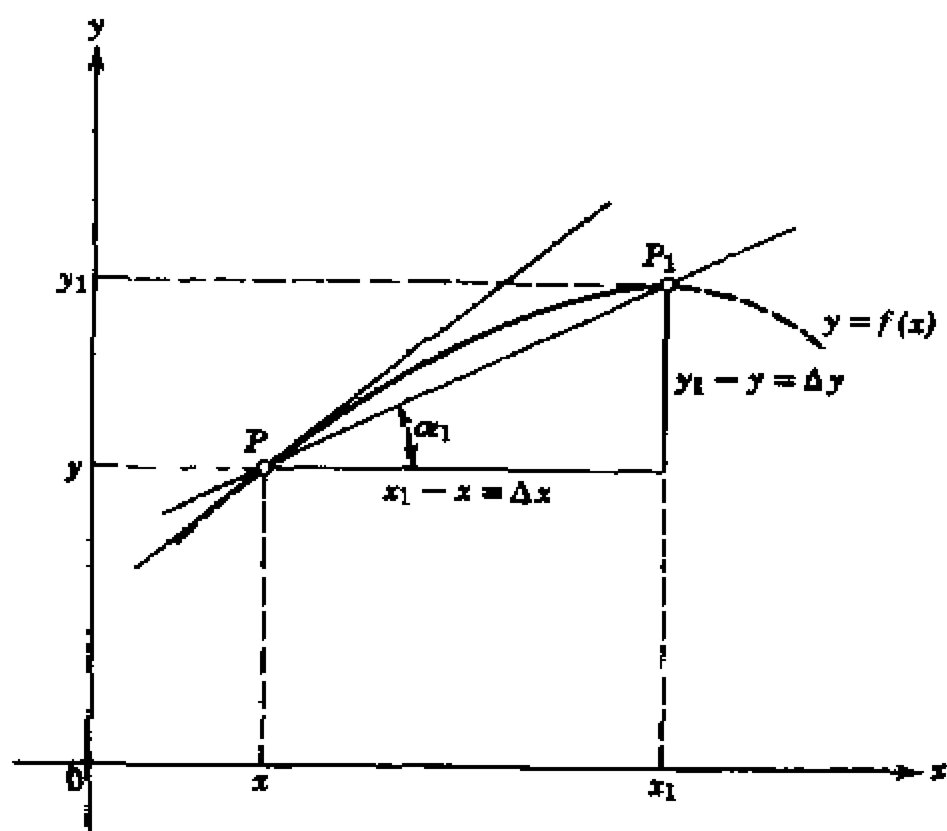


图 2.22

这里所用的符号其意义是明白的. 设 x、y 和 x_1、y_1 分别是点 P 和 P_1 的坐标. 这时, 我们立即得到[1]

$$\tan\alpha_1=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

因此, 上述求极限的过程 (不考虑垂直切线 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 的情况) 可由下式来表示:

$$\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\lim_{x_1\to x}\tan\alpha_1=\tan\alpha.$$

表示法 我们将表达式

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**差商**, 其中符号 Δy 和 Δx 分别表示函数 $f(x)$ 和自变量 x 之差分. (这里同在第 139 页上一样, 符号 Δ 是求差

1) 为了使这个式子有意义, 我们必须假设 x 和 x_1 二者都属于 f 的定义域. 后面, 在进行极限过程的每一步, 我们也都不言而喻地做此相应的假设.

的简写，不是相乘的因子.）因此，α 的正切，即曲线的"斜率"[1]，等于函数 f 的差商当 $x_1\to x$ 时所趋向的极限.

我们将这个差商的极限称为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的**导数**[2]. 通常既使用拉格朗日（Lagrange）表示法 $y'=f'(x)$ 来表示导数，也使用莱布尼兹所用的符号 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{df(x)}{dx}$ 或 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)f(x)$[3]. 在第 192 页上我们将要更详细地讨论莱布尼兹表示法的意义；这里我们指出，记号 $f'(x)$ 说明这样一个事实：**导数本身是** x **的函数**，因为对所考虑的区间上的每一个 x 值都对应着一个 $f'(x)$ 的值. 有时通过使用**导函数**、**导曲线**等术语来强调这一事实. 导数的定义有下列几种不同的表达形式：

$$f'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

其中第二个表达式里 x_1 为 $x+h$ 所代替，或者使用莱布尼兹表示法：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

如果 f 在点 x 的邻域内有定义，则商 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 对于一切值 $h\neq 0$（只要 $|h|$ 足够小，从而保证 $x+h$ 属于所考虑的区间）就是 h 的函数. 把 $f'(x)$ 定义为极限，就是要求

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|$$

对于一切（正的或负的）充分小的 $h(h\neq 0)$ 来说为任意小.

导数的计算 导数的直观概念和一般的分析概念都是比较简单的，也是不难理解的；但真正进行这种求极限的过程，却不十分简易.

1）有时也称为**斜量**或**方向系数**

2）在一些老的教科书中也称为**微分系数**.

3）也使用柯西表示法 $Df(x)$ 和牛顿表示法 $\dot{y}$.

仅仅在差商的表达式中令 $x_1=x$，是不可能求出导数的，因为这时分子和分母二者都将等于零，我们会得到没有意义的表达式 $\frac{0}{0}$. 因此，在每一种情况下，向极限过渡都必须经过某些准备阶段(对差商进行变换).

例如，对于函数 $f(x)=x^2$，我们有

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=x_1+x \quad 当 x\neq x_1 时.$$

这个函数 x_1+x 同 $\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$ 的定义域不完全相同：函数 x_1+x 在 $x_1=x$ 这一点有定义，而商 $\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$ 在这一点则没有定义. 对于所有其他的 x_1 之值，这两个函数彼此相等. 因此，在求极限的过程中就特别要求 $x_1\neq x$，此时对于 $\lim\limits_{x_1\to x}\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$ 和对于 $\lim\limits_{x_1\to x}(x_1+x)$ 我们便得到相同的值. 然而，由于函数 x_1+x 在点 $x_1=x$ 有定义并且是连续的，所以对于这个函数我们只要直接令 $x_1=x$ 便可得到极限，而对于商 $\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$ 则不能这样做. 于是，我们得到导数

$$f'(x)=\frac{d(x^2)}{dx}=2x.$$

作为另一个例子，我们来微分函数 $y=\sqrt{x}\ (x>0)$，即求这个函数的导数. 当 $x_1\neq x$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}&=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x}}{x_1-x}\\&=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x})}{(x_1-x)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x})}\\&=\frac{x_1-x}{(x_1-x)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

因此(当 $x>0$ 时)

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\lim_{x_1\to x}\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

当 $x=0$ 时，出现奇异性：导数为无穷大．因为当 $x_1\to 0$ 时

$$\frac{\sqrt{x_1}-0}{x_1-0}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}\to\infty$$

分析定义

对于微分一个函数的过程我们给出一个与切线的几何直观概念完全无关的分析定义，这一点是极为重要的．积分的分析定义与面积的几何视觉无关，曾使我们能够以积分概念作为面积概念的根据．按照同样的精神，我们不去涉及函数 $y=f(x)$ 借助于曲线的几何表示法，而将函数 $y=f(x)$ 的导数定义为由差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限（如果这个极限存在的话）给出的新函数 $y'=f'(x)$

这里，差 $\Delta y=y_1-y=f(x_1)-f(x)$ 与 $\Delta x=x_1-x$ 是变量 y 和 x 的"相应的改变量"．我们可将比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 称为在区间 $(x,x+\Delta x)$ 上 y 对于 x 的"平均变化率"．这时，极限 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 则表示 y 对 x 的"瞬时变化率"，或简称为"变化率"．

如果这个极限存在，我们就说函数 $f(x)$ 是可微的．除非特别做了相反的说明[1]，我们将总是假设所讨论的每一个函数都是可微的．我们强调指出，如果函数 $f(x)$ 在点 x 是可微的，则商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时的极限必须存在，其中 h 可以是使得 $x+h$ 属于 f 的定义域的任何不等于零的值．特别是，如果 f 在包含 x（在其内部）的整个区间上有定义，则上述极限必定存在，而不论 h 趋向于零的方式如何，即不论它是通过正值还是通过负值，其符号不受限制．

有了导数 $f'(x)$ 的分析定义，现在我们就可以根据方程 $\tan\alpha=f'(x)$ 所给定的（与正 x 轴而言的方向）角 α 取作为曲线的点 (x,y) 处的切线方向[2]．这样，用分析定义作为几何定义的依据，我们就

1) 不满足这个假设的一些例子将在后面给出（见第 188 页）．如果说正文中总是保证有这种可微性，那么这些例子则证明可微性是一种假设．

2) 角 α 并不完全唯一确定，而能换成 $\alpha\pm\pi,\alpha\pm 2\pi$ 等等．除非像上面那样我们指定 $0\le\alpha<\pi$

避免了由于几何形象的不明确性可能引起的困难. 事实上, 现在我们已准确地**定义了** $y = f(x)$ 的曲线在点 (x,y) 的切线指的是什么, 并且我们有了判定一条曲线在给定点 (x,y) 是否具有切线的分析准则.

单调函数

然而, 将导数形象化地解释为曲线切线的斜率, 这对于理解却很有帮助, 即使在纯分析的讨论中也是如此. 基于几何直观的下述命题就是这一种情况:

函数 $f(x)$ **当** $f'(x) > 0$ **时是单调增加的, 而当** $f'(x) < 0$ **时是单调减少的.**

事实上, 如果 $f'(x)$ 是正的, 那么, 沿 x 增加的方向来看曲线, 其上的切线均向上倾斜, 即指向 y 增加的方向 (α 是 "锐角"), 因此, 在所讨论的点上曲线随 x 增加而上升; 反之, 如果 $f'(x)$ 是负的, 则切线向下倾斜 (α 是 "钝角"), 曲线随 x 增加而下降 (见图 2.23). 这个命题的分析证明见第 199 页.

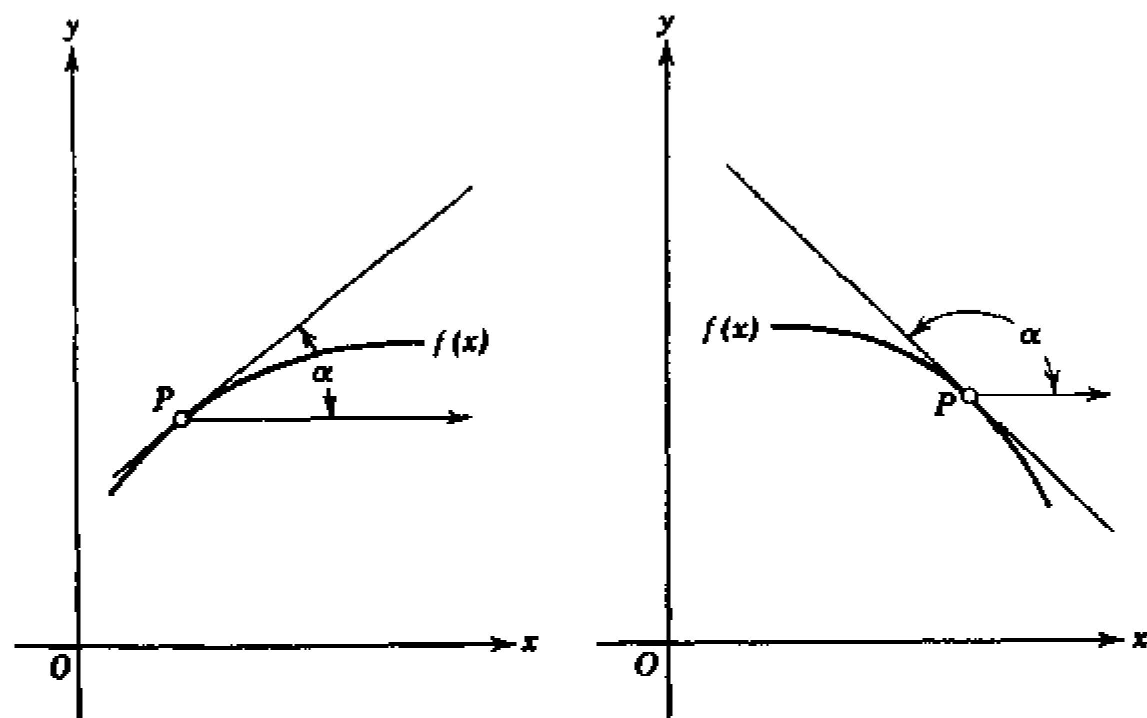


图 2.23　增加函数和减少函数曲线的切线

b. 作为速度的导数

速度的直觉观念需要由精确的定义来代替，这再次导致我们曾称之为微分法的完全相同的极限过程.

我们来举一个例子：一个点沿着平行于 y 轴的直线而运动. 这时点的位置是由单独的一个坐标 y 来确定. 这个坐标就是动点与该直线上的一个固定的初始点的距离，并带有适当的正负号. 如果我们已知作为时间 t 的函数的 y：$y = f(t)$，则点的运动就是已确定的了. 如果这个函数是线性函数 $f(t) = ct + b$，我们就说这是速度为 c 的匀速运动，此时，对于每一对不同的值 t 和 t_1，我们用在此时间间隔中通过的距离除以这一时间间隔的长度，便得到速度

$$c = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

所以，速度 c 是函数 $ct + b$ 的差商，这个差商与我们所选定的一对特殊的时刻无关. 但是，如果运动不再是匀速的，那么我们将时刻 t 的速度理解成什么呢？

为了回答这个问题，我们考察差商

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t},$$

这个差商称为在 t_1 和 t 之间的时间间隔上的**平均速度**. 现在，如果当 t_1 趋向于 t 时，这个平均速度趋向于确定的极限，我们就将这个极限定义为时刻 t 的速度. 换句话说，**时刻 t 的速度**，即距离对于时间的瞬时变化率，便是导数

$$f'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

牛顿曾强调把导数[1]解释为速度，他所用的记号是 $\dot{y}$ 或 $\dot{f}(x)$，而不是 $f'(x)$. 牛顿的这种表示法我们有时也会用到. 当然，如果要使速度的概念有意义，则必须假设函数是可微的.

1) 牛顿称之为“流数 (fluxion)”.

一个简单的例子是自由落体运动. 我们从实验中所建立的下述定律出发：当 $t=0$ 时处于静止而后开始运动的自由落体在时间 t 内经过的距离与 t^2 成正比；所以，这一定律可由下列形式的函数来表示

$$y=f(t)=at^2,$$

其中 a 为常数. 正如在第 170 页上所述，这时速度由表达式 $f'(t)=2at$ 给出；因此，**自由落体的速度与时间成正比地增加.**

c. 微分法举例

现在，我们通过几个典型例子来说明微分的方法.

线性函数

对于函数 $y=f(x)=c$，其中 c 为常数. 我们看到，对一切 x 值有 $f(x+h)-f(x)=c-c=0$，因此，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$；也就是说，**常数函数的导数是零.**

对于线性函数 $y=f(x)=cx+b$，我们得到

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ch}{h}=c.$$

即**线性函数的导数是常数.**

x 的幂

下面我们来微分幂函数

$$y=f(x)=x^{\alpha},$$

首先假设 α 是正整数. 如果 $x_1\neq x$，则我们有

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^{\alpha}-x^{\alpha}}{x_1-x}=x_1^{\alpha-1}+x_1^{\alpha-2}x+\cdots+x^{\alpha-1},$$

这里的最后一个等式我们可以直接除，也可以利用几何级数之和的公式得到. 这个简单的代数处理，乃是向极限过渡的关键；现在因

为等式右端最后一个表达式是 x_1 的连续函数, 特别是当 $x_1=x$ 时是连续的, 所以在这个表达式中, 我们直接将其中的 x_1 都换为 x, 便可实现极限 $x_1\to x$ 的过程. 这时, 每一项都取值 $x^{\alpha-1}$, 而项数正好是 α, 所以我们得到

$$y'=f'(x)=\frac{d(x^\alpha)}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

如果 α 是负整数 $-\beta$, 我们也可得到同样的结果; 但是, 我们必须假设 x 不为零. 这时, 我们得到

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\frac{1}{x_1^\beta}-\frac{1}{x^\beta}}{x_1-x}=\frac{x^\beta-x_1^\beta}{x-x_1}\cdot\frac{1}{x^\beta x_1^\beta}$$
$$=-\frac{x^{\beta-1}+x^{\beta-2}x_1+\cdots+x_1^{\beta-1}}{x_1^\beta x^\beta}.$$

再次直接用 x 来代替 x_1, 我们又可实现此极限过程. 同上面一样, 我们得到极限

$$y'=-\beta\frac{x^{\beta-1}}{x^{2\beta}}=-\beta x^{-\beta-1}$$

因此, 对于负整数 $\alpha=-\beta$, 导数仍然由公式

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}$$

给出.

最后, 对于 x 为正数而 α 为有理数的情况, 我们也可导出同样的公式. 设 $\alpha=\frac{p}{q}$, 其中 p 和 q 均为整数, 并且是正的. (如果其中之一是负的, 证明只要稍做一些改动; 当 $\alpha=0$ 时, 结果已经知道, 因为这时 x^α 是常数.) 现在我们有

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^{\frac{p}{q}}-x^{\frac{p}{q}}}{x_1-x}.$$

如果设 $x^{\frac{1}{q}}=\xi$, $x_1^{\frac{1}{q}}=\xi_1$, 便得到

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\xi_1^p-\xi^p}{\xi_1^q-\xi^q}=\frac{\xi_1^{p-1}+\xi_1^{p-2}\xi+\cdots+\xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1}+\xi_1^{q-2}\xi+\cdots+\xi^{q-1}}.$$

在进行最后这个变换以后，我们即可实现极限 $x_1 \to x$（或同样地 $\xi_1 \to \xi$）的过程，所得到极限值的表达式为

$$y' = \frac{p}{q}\frac{\xi^{p-1}}{\xi^{q-1}} = \frac{p}{q}\xi^{p-q} = \frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1},$$

也就是

$$f'(x) = y' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

这个结论在形式上同前面的一样．对于负有理指数，也有同样的微分公式，这留给读者自己去证明．

以后我们还要来讨论幂函数的微分法（第 209 页），并且证明上述公式对于任意指数 α 普遍成立．

三角函数

作为最后一个例子，我们来讨论**三角函数** $\sin x$ 和 $\cos x$ 的微分法．首先利用初等的三角加法公式来变换差商

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$
$$= \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}.$$

应用 1.8 节（第 88—89 页）的那些公式

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0,$$

我们立即得到

$$y' = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

对函数 $y = \cos x$ 也可用完全同样的方法来微分．我们从

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}$$

出发，再取 $h \to 0$ 时的极限，便可得到导数 [1)]

$$y' = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

1) 如果把 x 解释为角度，那么在这些 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的导数的公式中，自然要预先假定角 x 是按弧度来度量的．

d. 一些基本的微分法则

同积分的情况一样，微分存在着一些基本的法则，这些法则是由定义直接推出的，并且可以用来导出许多函数的导数.

1. 如果 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$，则 $\varphi'(x)=f'(x)+g'(x)$.

2. 如果 $\psi(x)=cf(x)$(其中 c 为常数)，则 $\psi'(x)=cf'(x)$.

这里只需首先把差商写成

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

和

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

再由此取极限，即可推得上面两个法则.

因此，例如函数 $\varphi(x)=f(x)+ax+b$(其中 a 和 b 均为常数)的导数由下式给出：

$$\varphi'(x)=f'(x)+a.$$

应用这些法则以及幂函数本身的导数公式，我们也就可以微分任何多项式 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，并且得到

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

e. 函数的可微性和连续性

可微性是比连续性更强的条件，知道这一点是有益的.

如果一个函数是可微的，则它必定是连续的.

因为，如果当 h 趋向于零时，差商 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 趋向于确定的极限，则这个分数的分子，即 $f(x+h)-f(x)$，必定同 h 一起趋向于零[1]；这正表明函数 $f(x)$ 在点 x 是连续的. 因此，对

1) 因为这时 $\lim\limits_{h\to0}[f(x+h)-f(x)]=\left[\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right](\lim\limits_{h\to0}h)=f'(x)\cdot0=0$.

于能够证明是可微的那些函数（也是我们将遇到的大多数函数）来说，通过烦琐的运算分别证明其连续性是没有必要的.

导数的间断性——隅角

然而，逆命题则不成立，也就是说，并不是每一个连续函数在每一点上都有导数. 函数 $f(x)=|x|$，即当 $x\leq 0$ 时 $f(x)=-x$，当 $x>0$ 时 $f(x)=x$，就是一个最简单的反例，其曲线如图 2.24 所示. 在点 $x=0$，这个函数是连续的，但是没有导数. 因为差商 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，当 h 通过正值趋向于零时，其极限等于 1，当 h 通过负值趋向于零时，其极限等于 -1；所以如果我们对 h 的符号不加限制，则极限不存在. 我们说，这个函数在点 $x=0$，**右导数**和**左导数**是不同的，这里右导数和左导数分别指的是当 h 只是通过正值趋向于零和只是通过负值趋向于零时 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的极限值. 因此，定义在一个区间上的函数在某个点上的可微性，不仅要求右导数和左导数都存在，还要求二者必须相等. 在几何上，这两个导数不相等意味着曲线具有**隅角**.

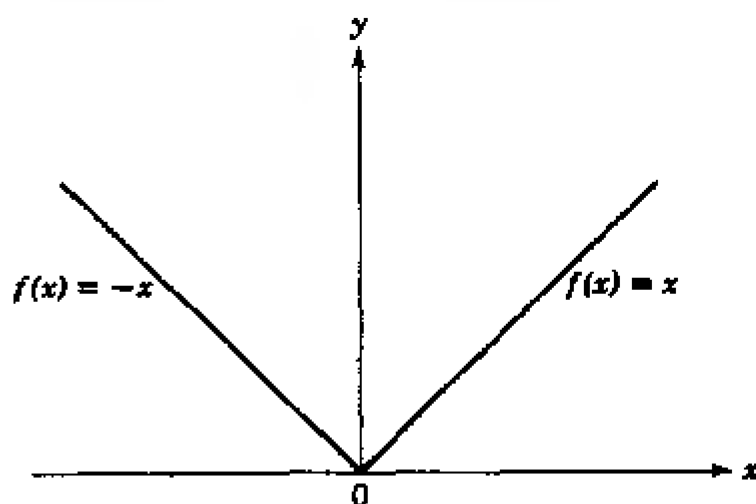


图 2.24　$f(x)=|x|$

无穷大间断性

作为连续函数在一点上是不可微的进一步的例子，我们考虑导数在该点上变为无穷大的情形，即右导数和左导数都不存在，当

$h \to 0$ 时差商 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 无限增大的情形. 让我们考虑函数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, 它在一切 x 值上有定义并且是连续的. 对于非零的 x 值, 其导数由公式 $y' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 给出 (第 184 页). 在点 $x = 0$, 可以推得 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = h^{-\frac{2}{3}}$, 我们立即可以看出, 当 $h \to 0$ 时, 这个表达式没有极限值, 相反, 它趋向于无穷大. 这种情况常常简略地叙述为: 在该点, 函数具有无穷导数, 或导数为无穷大; 然而, 正如我们会想到的, 这只不过是说, 当 h 趋向于零时差商无限增大, 而在我们所给的导数定义的意义下, 导数实际上是不存在的. **无穷导数** 的几何意义是: 曲线的切线是垂直的 (见图 2.25).

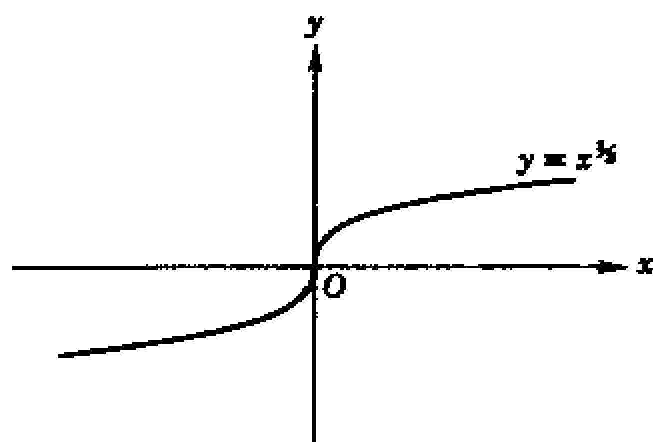


图 2.25

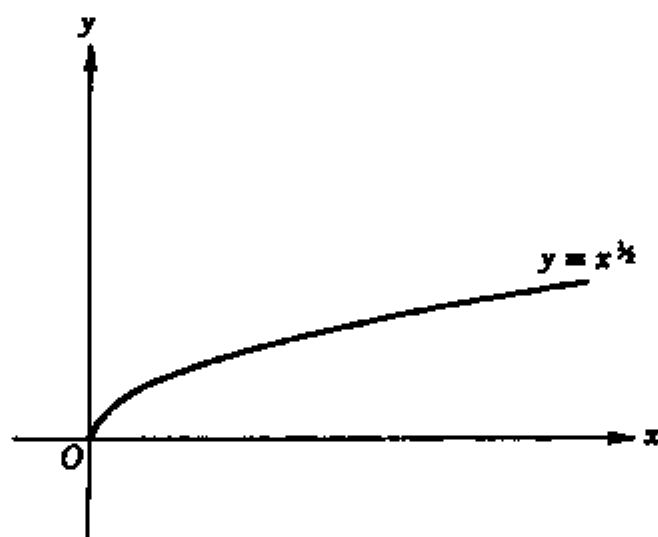


图 2.26

又如函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 当 $x>0$ 时有定义并且是连续的，但在点 $x=0$ 也是不可微的．因为对于负的 x 值 y 没有定义，所以在这里我们只考虑右导数．等式 $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$ 说明右导数是无穷大，函数的曲线在原点处与 y 轴相贴（图 2.26）．

最后，在函数 $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ 一例中，出现这样的情况：在点 $x=0$，右导数是正的无穷大，而左导数是负的无穷大．这由下列关系式便可推知：

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{h}}.$$

事实上，连续曲线 $y=x^{\frac{2}{3}}$，即所谓**半立方抛物线**或**尼尔(Neil)抛物线**，在原点处是一个**尖点**，其切线垂直于 x 轴（图 2.27）．

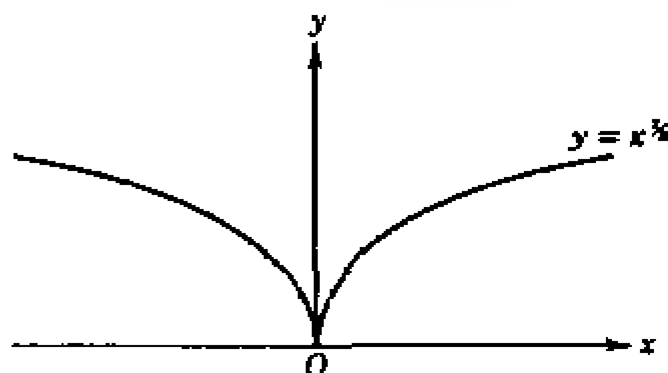


图 2.27

f. 高阶导数及其意义

导函数 $f'(x)$ 的图形，称为 $f(x)$ 的图形的**导曲线**．例如，抛物线 $y=x^2$ 的导曲线是一条直线，由函数 $y=2x$ 来表示．正弦曲线 $y=\sin x$ 的导曲线是余弦曲线 $y=\cos x$．类似地，曲线 $y=\cos x$ 的导曲线则是曲线 $y=-\sin x$．（这些三角函数曲线，通过沿 x 轴方向的平移可由这一条得到另一条，如图 2.28 所示．）

我们很自然地会想到，还可作出导曲线的导曲线，也就是说，求出函数 $f'(x)=\varphi(x)$ 的导数．这个导数即

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},$$

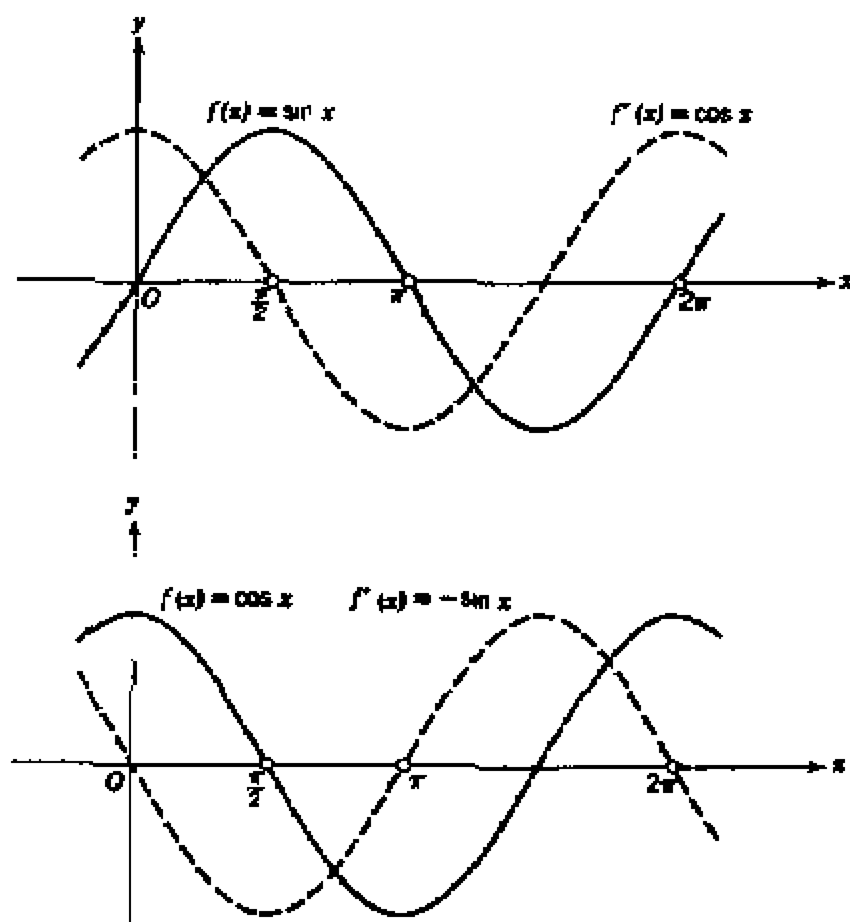


图 2.28 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的导出曲线

如果它存在，则称为函数 $f(x)$ 的**二阶导数**，我们记作 $f''(x)$.

类似地，我们可以试图求出 $f''(x)$ 的导数，即所谓**三阶导数**，并记作 $f'''(x)$. 对于我们所考虑的大量函数来说，可将微分过程重复任意多次而不会遇到任何障碍，这样便定义了 **n阶导数** $f^{(n)}(x)$[1]. 有时将函数 $f(x)$ 本身称为 0 阶导数，也是很方便的.

如前所述，如果把自变量解释为时间 t，点的运动由函数 $f(t)$ 来表示，则二阶导数的**物理**意义是速度 $f'(t)$ 对于时间的变化率，或通常所说的**加速度**. 例如，在自由落体的运动中，在时间 t 内经过的距离由函数 $y=f(t)$ 给出. 我们求出在时刻 t 的速度 $f'(t)=2at$. 这时，加速度具有常值 $f''(t)=2a$ (这个值通常和重力加速度 g 是一样的). 以后 (第 265 页)，我们将要详细地讨论二阶导数的几何意义. 我们在这里只指出下述事实：在 $f''(x)$ 为正的点上，$f'(x)$ 随 x

1) 也使用二阶、三阶、…、n 阶微分系数这些术语，或使用 $D^2f,\cdots,D^nf$ 这种表示法 (见第 179 页脚注).

增加而增加；如果 $f'(x)$ 为正，则当 x 增加时曲线 $f(x)$ 陡度增加. 反之，在 $f''(x)$ 为负的点上，$f'(x)$ 随 x 增加而减少，如果 $f'(x)$ 为正，则当 x 增加时曲线陡度减小.

最后，我们注意到，高阶导数也可以用来定义函数. 例如，我们能够通过含有函数及其二阶导数的所谓微分方程来表征三角函数. 由公式 $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$, $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$, 再次微分，我们立即得到

$$\frac{d^2}{dx^2}\cos x=-\cos x,\qquad \frac{d^2}{dx^2}\sin x=-\sin x.$$

因此，如果用符号 u 代替函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中的任何一个，我们则有关系式（微分方程）

$$u''=-u.$$

任何线性组合 $u=a\cos x+b\sin x$, 其中系数 a,b 为常数，显然也满足这个方程. 在第 348 页上我们将会看到，这种具有任意常数 a 和 b 的线性组合，是满足 $u''=-u$ 的唯一的函数 u.

在涉及到振动和波动现象（例如弹簧运动和水平波的运动）的各种应用之中，对于具有物理意义的变量 u（自变量通常是时间），我们由物理规律常常直接得到 $u''=-u$ 这种类型的微分方程. 因此，认识到 u 能够通过三角函数简单地来表示，这一点是很重要的（见第九章）.

g. 导数和差商. 莱布尼兹表示法

在莱布尼兹的表示法中，微分法的求极限过程在符号上是这样来表示的：即用符号 d 代替符号 Δ, 而在导数的定义中引入下列莱布尼兹符号

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

如果我们希望对于微分的意义得到清楚的理解，则必须注意原来曾把导数想象为实际上是两个"无穷地小"的"量" dy 和 dx 之商的这

种谬见. 差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 只是对于不等于零的差 Δx 才有意义. 当建立了这个真正的差商以后, 我们必须通过变换或其他在求极限时也能避免用零除的方法来实现这一极限过程. 下面这样的设想是讲不通的: 首先 Δx 和 Δy 经历了有点像求极限的过程而达到一个无穷地小但还不等于零的值, 于是 Δx 和 Δy 便可用 "无穷地小的量" 或 "无穷小" dx 和 dy 来代替, 然后构成这些量的商. 这种导数概念同数学的明确性是不相容的; 事实上, 这种概念是完全没有意义的. 对于许多人来说, 由于这种概念总是同 "无穷" 这个词相联系而无疑是具有某种神秘感觉的; 在微分学的早期, 甚至莱布尼兹本人也会把这种含糊神秘的概念同极限过程的明确透彻的处理混合在一起. 但是现在, 无穷地小的量的神秘主义在微积分中已没有地位了.

然而莱布尼兹的表示法本身不仅具有启发性, 而且实际上也是极其灵活和有用的. 其原因是, 在许多计算和形式的变换中, 我们可以把符号 dy 和 dx 完全当作普通的数来处理. 在把 dx 和 dy 当作数来处理时, 我们就能更简洁地表示许多运算 (不这样做, 这些运算也是明显地可以实现的). 在以后几章中, 我们将会看到这个事实一再被证实, 并且将发现自由地反复应用这个事实是完全有数的, 只要我们不忽略记号 dy 和 dx 的符号性.

* 对于二阶导数和高阶导数, 莱布尼兹也发明了具有启发性的表示法. 他把二阶导数看作为下述 "二阶差商" 的极限: 除了变量 x 以外, 我们考虑 $x_1 = x + h$ 和 $x_2 = x + 2h$. 这时, 我们取二阶差商——一阶差商的一阶差商 ($\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为一阶差商), 即表达式

$$\frac{1}{h}\left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y}{h}\right) = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y),$$

其中 $y = f(x), y_1 = f(x_1)$ 和 $y_2 = f(x_2)$. 记 $h = \Delta x, y_2 - y_1 = \Delta y_1, y_1 - y = \Delta y$, 我们便可适当地将后面一个括号中的表达式称

为 y 的差分之差分，或 y 的**二阶差分**，并用符号记为

$$y_2 - 2y_1 + y = \Delta y_1 - \Delta y = \Delta(\Delta y) = \Delta^2 y.$$

因此，在这种符号表示法中，二阶差商写成 $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$，其中分母真正是 Δx 的平方，而分子中的上标"2"表示把该取差的过程再重复一次．于是二阶导数表示为

$$f''(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{\Delta^2 f}{(\Delta x)^2}.$$

这种差商[3]的符号体系，使得莱布尼兹对于二阶导数以及高阶导数采用下列表示法：

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \text{等等.}$$

我们将会发现这种表示法已经受住了实用的检验[3]

h. 微分中值定理

差商要涉及到不同的 x 值上的函数值，而在某一点的导数并不反映其他任一点上的函数的性态；差商反映函数在"大范围"的性质，而导数反映局部的性质或"小范围"的性质．我们常常需要从函数的导数所给出的局部性质，推出其整体的或"大范围的"性质．为此，我们利用差商和导数之间的基本关系式，即通常所说的"微分中值定理"．

这个中值定理在直观上是不难理解的．我们作函数 $f(x)$ 的差商

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

1) 这里 $\Delta\Delta = \Delta^2$ 只不过是对于"差分之差分"或"二阶差分"采用的一个符号．

2) 我们必须强调指出，二阶导数可以表示为二阶差商的极限这个命题是需要证明的．我们在前面定义二阶导数时用的不是这种方法，而是把它作为一阶导数的一阶差商的极限来定义的．如果二阶导数是连续的，则这两个定义是等价的，但是，其证明将在后面给出（见第五章附录 II），因为我们并不特别需要这个结论．

3) 这是一种习惯的表示法．如果加上括号写成 $y'' = \frac{d^2 y}{(dx)^2}$，$y''' = \frac{d^3 y}{(dx)^3}$，会更清楚一些，但是通常并不这样做．

并且假设此函数的导数在闭区间 $x_1 \le x < x_2$ 上处处存在，而使得其曲线图形处处具有切线. 这个差商是割线 P_1P_2 的倾斜角 α 的正切，如图 2.29 所示. 我们想象把这一条割线作与其本身平行的移

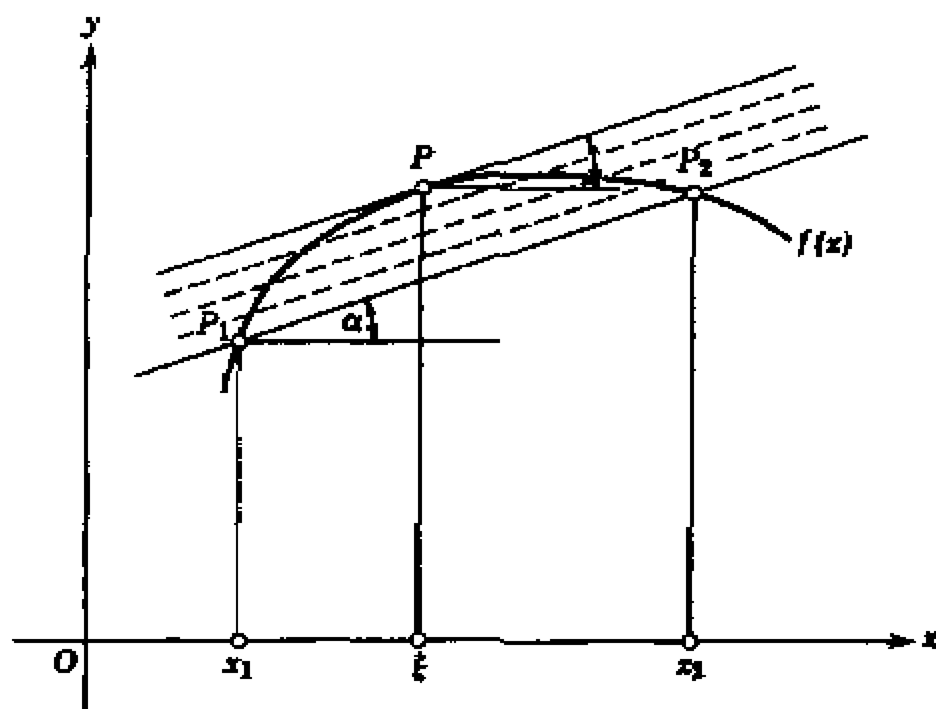


图 2.29

动，那么它至少有一次会达到这样的位置，即在曲线与割线 P_1P_2 的距离最远的那一点 $P(x=\xi)$ 上，成为曲线的切线. 也就是说，在这个区间上存在中间值 ξ，使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi).$$

这个命题称为**微分中值定理**[1]. 如果我们注意到数 ξ 可以写成下列形式：

$$\xi=x_1+\theta(x_2-x_1),$$

其中 θ 是处于 0 与 1 之间的某个值，则上述定理的表达形式可以略有改变. 虽然一般说来 θ (或 ξ) 不能更精确地确定，但是这个定理在应用中是极为有效的.

1) 原书称为平均值 (Mean Value) 定理，并加注指出更合适的名称是中间值定理. 为与习惯一致，译本一律采用中值定理这一名称. —— 译者注

例如，我们来考虑这种情况：x 代表时间，$y = f(x)$ 是汽车从起点沿某一条公路经过的距离．这时，$f'(x)$ 是汽车在时刻 x 的速度．譬如说，如果在前两小时 ($\Delta x = 2$) 司机行驶了距离 $\Delta f = 120$ 英里 (1 英里 = 1.60934 km)，那么由中值定理我们便可断定，在这两小时中至少有一瞬间司机驾驶的速度正好是每小时 60 英里．例如，不能要求司机在这两小时中驾驶速度总是小于每小时 50 英里．另一方面，我们并不能明确指出速度正好达到每小时 60 英里的那个时刻 ξ；它可能是第一个小时中的某一时刻，也可能是第二个小时中的某一时刻，也可能存在好几个这样的时刻．

中值定理的精确叙述如下：

如果 $f(x)$ 在闭区间 $x_1 \leq x \leq x_2$ 上是连续的，而在开区间 $x_1 < x < x_2$ 的每一点上是可微的，则至少存在一个值 θ，$0 < \theta < 1$，使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'[x_1 + \theta(x_2 - x_1)]$$

如果用 x 代替 x_1，用 $x + h$ 代替 x_2，我们还可将中值定理用下列公式来表示

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi) = f'(x + \theta h), \quad x < \xi < x + h.$$

虽然 $f(x)$ 在区间的所有点上、包括在端点上，都必须是连续的，但是我们并不需要假设在区间的端点导数存在．

如果在区间内部的一个点上导数不存在，则中值定理不一定成立．这从 $f(x) = |x|$ 一例中便不难看出．

1. 定理的证明

为了证明中值定理，通常是把它简化为一种特殊的情况．我们首先来讨论这种特殊的情况：

罗尔 (Rolle) 定理．如果函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $x_1 \leq x \leq x_2$ 上是连续的，而在开区间 $x_1 < x < x_2$ 上是可微的，并且 $\varphi(x_1) = 0$ 和

$\varphi(x_2)=0$, 则在区间内部至少存在一个点 ξ, 在这一点上 $\varphi'(\xi)=0$.

几何解释. 这个定理意味着: 如果在区间的两个端点上曲线交于 x 轴, 则它必定在某个中间点上具有水平的切线 (图 2.30)

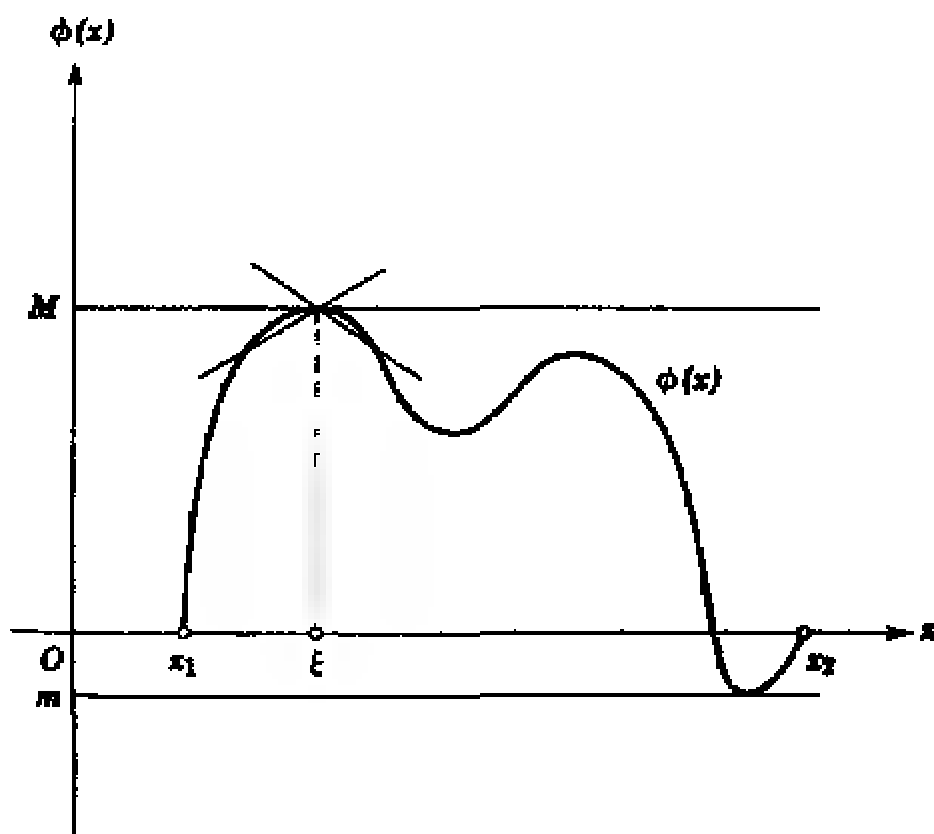


图 2.30

实际上, 因为 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上是连续的, 所以在这个区间上存在 $\varphi(x)$ 的最大值 M 和最小值 m (见第 112 页). 又因为在区间的两个端点 φ 等于零, 所以我们必定有 $m\leq 0<M$. 如果最大值和最小值相等, 则必定有 $m=M=0$, 而在区间的所有点上 $\varphi(x)=0$: 这时, 在区间内有 $\varphi'(x)=0$, 即对于区间内的每一个点 ξ, $\varphi'(\xi)=0$. 因此, 我们只须考虑 m 和 M 不全等于零的情况. 特别是, 如果 M 不等于零, 则 M 必定大于零. 由连续性我们知道, 在区间 $[x_1,x_2]$ 上存在点 ξ, 使得 $\varphi(\xi)=M$. 但因为 $\varphi(x)$ 在区间的端点等于零, 所以 ξ 必须是一个内点. 而且, 对于 $[x_1,x_2]$ 上的一切 x, 有 $\varphi(x)\leq\varphi(\xi)=M$. 因此, 对于其绝对值充分小的 h, 不等

式 $\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)<0$ 成立. 这意味着差商

$$\frac{\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)}{h}$$

当 $h>0$ 时为负或为零, 而当 $h<0$ 时为正或为零. 如果令 h 通过正值趋向于零, 我们则得到 $\varphi'(\xi)<0$. 如果令 h 通过负值趋向于零, 则得到 $\varphi'(\xi)>0$. 因此, $\varphi'(\xi)=0$. 这样, 在 $M\neq 0$ 的情况下我们证明了罗尔定理. 当 $m\neq 0$ 时, 也可同样地进行论证.

现在来证明中值定理. 我们将罗尔定理应用于函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(x_1)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

这个函数[1]表示曲线上的点 $(x,f(x))$ 同曲线的割线之间的竖直方向的距离, 它显然满足条件 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$ 并且是形式为 $\varphi(x)=f(x)+ax+b$ 的函数, 其中系数 $a=-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 和 b 都是常数. 由第 187 页我们知道

$$\varphi'(x)=f'(x)+a.$$

于是根据罗尔定理, 必定存在中间值 ξ, 使得

$$0=\varphi'(\xi)=f'(\xi)+a.$$

因此,

$$f'(\xi)=-a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

于是中值定理得证.

中值定理的意义

我们曾经把函数的导数定义为某个区间上的差商当区间的端点相互趋近时的极限. 中值定理建立了可微函数的差商同导数之间

1) 这个函数的值同曲线上的点 $(x,f(x))$ 到曲线的割线之间的距离成正比, 这个结论读者自己不难证明, 例如利用初等解析几何中的一个事实: 表达式 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(y-mx-b)$ 表示点 (x,y) 与方程为 $y-mx-b=0$ 的直线之间的(带有正负号的)距离. 因此我们发现, 在与割线距离最远的曲线的点上, 其切线的确平行于割线.

的联系，这里并不要求收缩为一点. 每一个差商都等于一个适当的中间点 ξ 处的导数.

例 同在积分学中值定理中完全一样，这里除了 ξ 位于区间内部这个事实以外，对于 ξ 的位置也并未作出任何明确的断言. 例如，对于二次函数 $y = f(x) = x^2$, 其导数为 $f'(x) = 2x$, 我们得到

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 = f'(\xi),$$

其中 $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 是区间 $[x_1, x_2]$ 的中点. 然而，一般说来，根据不同的情况，ξ 可以取为 x_1 和 x_2 之间的任何其他值. 例如，如果 $f(x) = x^3$, 我们则有 $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 = f'(\xi) = 3\xi^2$, 其中 $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

单调函数. 作为微分学中值定理的许多应用之一，我们来证明如果 $f(x)$ 的导数不变号，则 f 是单调函数. 具体地说，假设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的，而在开区间 (a, b) 中的每一点上是可微的. **这时，如果对于** (a, b) **内的** x,**有** $f'(x) > 0$, **则函数** $f(x)$ **是单调增加的；类似地，如果** $f'(x) < 0$, **则函数是单调减少的**，其证明是很明显的：设 x_1 和 x_2 是闭区间 $[a, b]$ 上的任何两个值. 于是在 x_1 和 x_2 之间，当然也是在 a 和 b 之间，存在 ξ, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

如果在 (a, b) 内处处有 $f'(x) > 0$, 则特别有 $f'(\xi) > 0$. 因此，当 $x_2 > x_1$ 时 $f(x_2) - f(x_1)$ 为正；也就是说，$f(x)$ 是单调增加的. 类似地，如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则 f 是单调减少的.

我们可用同样的方法来证明：**在闭区间** $[a, b]$ **上连续而在开区间** (a, b) **内可微的函数** $f(x)$, **如果在** (a, b) **内处处有** $f'(x) = 0$, **则必定是常数**. 因为，这时

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0.$$

这个重要的命题对应着直观上十分明显的事实，即如果曲线每一点上的切线都平行于 x 轴，则该曲线必定是平行于 x 轴的直线.

可微函数的利普希茨连续性. 我们在前面已经讲过，具有导数的函数 $f(x)$ 必定是连续的. 现在微分学中值定理则提供了一个更为精确的定量描述，即**连续模**. 我们考虑函数 $f(x)$，它定义在闭区间 $[a,b]$ 上，并且在这个区间的每一个点上都具有导数 $f'(x)$. 假设 $f'(x)$ 在这个区间上是**有界的**(如果 $f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是连续的，则必然如此)；于是存在数 M，使得 $|f'(x)| < M$ 对于 (a,b) 内的任何两个值 x_1、x_2，我们由中值定理推知

$$|f(x_2)-f(x_1)| = |f'(\xi)(x_2-x_1)| \le M|x_2-x_1|$$

于是，对于给定的 $\varepsilon > 0$，我们有一个简单的连续模 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$，使得

$$|f(x_2)-f(x_1)| \le \varepsilon, \quad 当 \ |x_2-x_1| < \delta \ 时.$$

例如，在区间 $-a \le x \le +a$ 上考虑函数 $f(x) = x^2$. 因为

$$|f'(x)| = |2x| \le 2a,$$

我们看出，这里

$$|f(x_2)-f(x_1)| < \varepsilon, \quad 当 \ |x_2-x_1| \le \frac{\varepsilon}{2a}.$$

我们已经说过，如果存在常数 M，对于所讨论的区间上的一切 x_1、x_2，使得

$$|f(x_2)-f(x_1)| < M|x_2-x_1|,$$

我们就说函数 $f(x)$ "**满足利普希茨条件**"，或者说**是**"**利普希茨连续的**"，这意味着一**切差商**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

的绝对值，具有同样的上界 M. 我们看出，任一个函数 $f(x)$，如果在闭区间上具有连续的导数 f'，则是利普希茨连续的. 但是，即使并不是在每一点上都具有导数的函数，也可能是利普希茨连续的，例如 $f(x)=|x|$. 读者可以自己证明，对于这个函数，总有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$.

另一方面，并不是每一个连续函数都是利普希茨连续的. 这一点由 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 一例便可证明；这时

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{-\frac{2}{3}}$$

当 x 很小时是无界的；因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不是利普希茨连续的. 这同下述事实是一致的：导数 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 当 x 趋向于零时是无界的. 利普希茨连续的函数，构成了介于只是连续的函数与具有连续导数的函数之间的重要的一类函数.

j. 函数的线性近似. 微分的定义

定义. 我们曾将 $y=f(x)$ 的导数定义为

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

其中 $\Delta x=h$. 如果对于固定的 x 和变量 h，我们定义量 ε:

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x),$$

则 $f'(x)$ 是 f 在点 x 处的导数这一事实相当于等式

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

量 $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ 表示当自变量 x 之值改变 $\Delta x=h$ 时所引起的因变量 y 之值的改变量或**增量**. 因为

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x,$$

所以量 Δy 是作为两部分之和出现的，即与 Δx 成正比的一部分 $f'(x)\Delta x$ 以及另一部分 $\varepsilon\Delta x$，且只要让 Δx 本身充分小便可使得后一部分与 Δx 相比为任意小. 我们将 Δy 的表达式中起主要作用的线性部分称为 y 的**微分**，并记作

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

对于任何可微函数 f 和固定的 x，这个微分是 $h = \Delta x$ 的一个完全确定的线性函数. 例如，对于函数 $y = x^2$，我们有 $dy = d(x^2) = 2x\Delta x = 2xh$. 对于特殊的函数 $y = x$，其导数为常数值 1，这时我们有 $dx = \Delta x$. 因此，当 x 为自变量时，将 Δx 写成 dx，这同我们的定义是一致的；所以，任何函数 $y = f(x)$ 的微分也可写成

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

因变量的增量

$$\Delta y = f'(x)dx + \varepsilon dx = dy + \varepsilon dx$$

与微分 dy 相差量 εdx，一般说来，这个量不为零. 例如，对于函数 $y = x^2$，我们有 $dy = 2xdx$，而

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 = 2xdx + \varepsilon dx,$$

其中 $\varepsilon = dx$.

从前我们使用符号 $\frac{dy}{dx}$ 来表示商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 Δx 趋向于零时的极限，这纯粹是在符号上的一种规定. 按照现在我们对 dy 和 dx 的定义，导数 $\frac{dy}{dx}$ 确实可以看作为 dy 和 dx 的普通的商. 然而，这里 dy 和 dx 在任何意义下都不是“无穷地小的量”或“无穷小”；这样来解释是没有意义的. 相反，dy 和 dx 是 $h = \Delta x$ 的完全确定的线性函数，对于大的 Δx 值，这些函数可以取大的数值. dy 和

dx 的商 $\dfrac{dy}{dx}$ 和导数 $f'(x)$ 具有相同的值，这并没有什么值得奇怪的地方；这不过是反复说明我们把 dy 定义为 $f'(x)dx$[1]

将 f 的增量和微分之间的关系改写为下列形式

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\varepsilon h,$$

还可看出，当我们把表达式 $f(x+h)$ 看作为 h 的函数时，它可用线性函数 $f(x)+hf'(x)$ 来表示，而当 h 充分小时，两者的误差 εh 同 h 相比为任意小．这种用线性函数 $f(x)+hf'(x)$ 来近似表示 $f(x+h)$，在几何上意味着，我们是用曲线在点 x 处的切线来近似代替曲线(见图 2.31)．

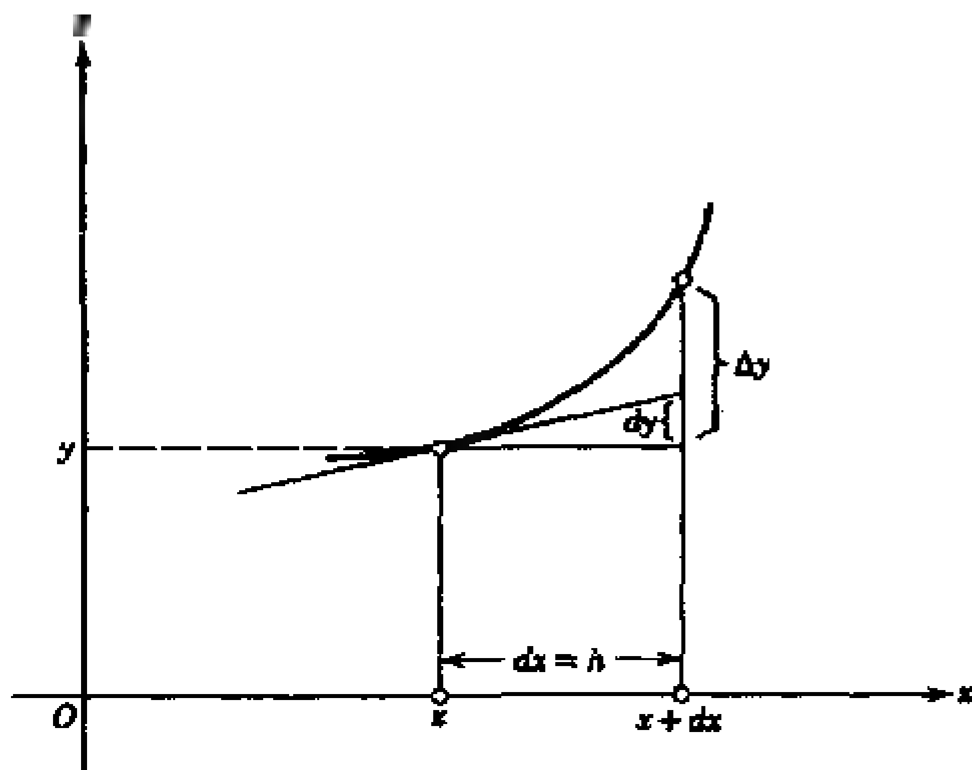


图 2.31　增量 Δy 和微分 dy

线性近似

由微分学中值定理，我们可以得到函数 $f(x)$ 同表示其切线的线性函数之间的“误差”(即偏差)大小的更精确的估计．对于 x 和

---

1) 类似地，可将高阶微分定义为 $d^2y=f''(x)h^2=f''(x)(dx)^2, d^3y=f'''(x)(dx)^3$，等等，这同高阶导数的莱布尼兹表示法是一致的

$x+h$ 之间的适当的 ξ, 我们有

$$f(x+h)-f(x)=hf'(\xi).$$

于是

$$\varepsilon=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=f'(\xi)-f'(x).$$

正像通常在应用中那样，如果函数 $f'(x)$ 本身具有导数 $f''(x)$, 那么再次应用中值定理，我们得到

$$f'(\xi)-f'(x)=(\xi-x)f''(\eta),$$

其中 η 是在 x 和 ξ 之间，因而也是在 x 和 $x+h$ 之间的一个中间值. 由此推出

$$|\varepsilon|=|(\xi-x)f''(\eta)|=|\xi-x||f''(\eta)|\leq hM,$$

其中 M 是 f 的二阶导数的绝对值在区间 $[x,x+h]$ 上的任一上界. 因此，度量 $f(x+h)$ 和线性函数 $f(x)+hf'(x)$ 的偏差的 $|\varepsilon h|$, 它的最大值为 Mh^2. 当 h 充分小时，表达式 Mh^2 当然要比 $f'(x)h$ 小得多，除非 $f'(x)$ 之值为零. 于是**在一个小区间上用线性函数这样来近似函数**，**无论是对于实际应用**还是对于高等数学分析，都具有极其重大的意义. 在后面的几章中，我们还要返回来讨论这个论题，并且同时给出更好的估值 $|\varepsilon h|<\frac{1}{2}Mh^2$

插值法

* 当采用数表来求函数 $f(x)$ 之值时，对于处在表中已列出 f 值的那些自变数之间的 x, 其上之 f 值通常是按**线性插值法**来确定的. 这种方法也相当于在一个区间上用线性函数来代替函数 f. 不过，在这种情况下，线性函数的图形不是由曲线 f 的**切线**而是由曲线 f 的**割线**给出的. 譬如说，在两个点 a 和 b 上 f 之值已知，那么对于中间的 x, 我们用下列表达式来代替 $f(x)$:

$$\rho(x)=f(a)+(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

这个表达式对于 x 来说是线性的, 并且在区间的端点 $x=a$ 和 $x=b$ 上给出 f 的精确值 (见图 2.32). 如果再次应用中值定理, 我们可以

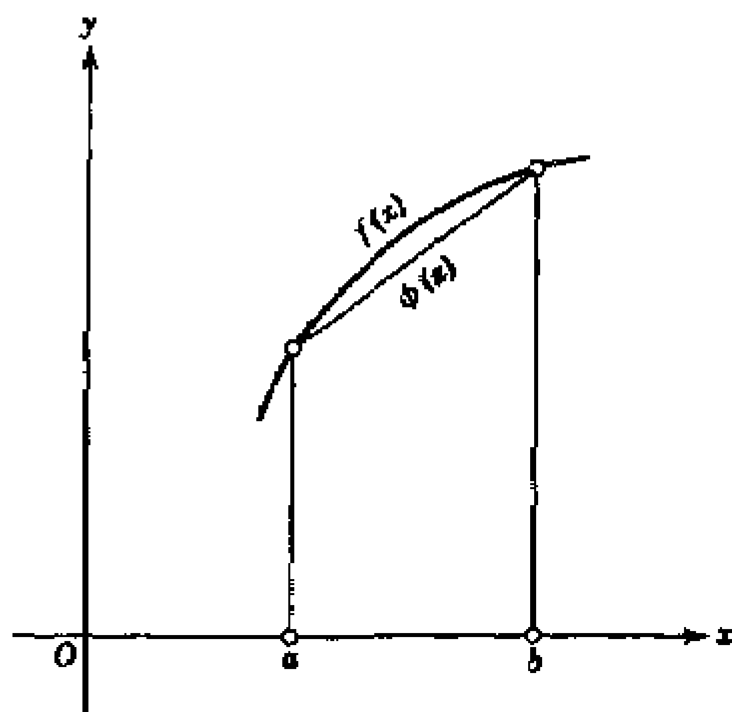


图 2.32 线性插值法

估计出这种近似方法的误差. 这里, 首先得到

$$f(x)-\varphi(x)=(x-a)\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$
$$=(x-a)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)].$$

由于 ξ_1 位于 a 和 x 之间, 因而和 ξ_2 一样也位于 a 和 b 之间. 这时, 再次应用微分学中值定理我们得到

$$f(x)-\phi(x)=(x-a)f''(\eta)(\xi_1-\xi_2),$$

其中 η 位于 ξ_1 和 ξ_2 之间, 因而也位于 a 和 b 之间, 因此, 如果用 M 表示 $|f''|$ 在区间 $[a,b]$ 上的上界, 则我们有

$$|f(x)-\varphi(x)|\leq|x-a||\xi_1-\xi_2||f''(\eta)|\leq M(b-a)^2.$$

这样, f 与其线性近似的偏差, 又一次可由区间长度的平方来估计.

作为一个数值例子，我们从用弧度表示的三角函数表查出下列数值：

$$\sin 0.75 = 0.6816, \quad \sin 0.76 = 0.6889,$$

这里误差不超过 0.00005. 如果我们想要知道对于中间的自变量值 0.754 的正弦函数之值，那么按线性插值法，便得到

$$\sin 0.754 \approx 0.6816 + \frac{4}{10}(0.6889 - 0.6816) \approx 0.6845.$$

对于函数 $f(x) = \sin x$，一阶导数是 $f'(x) = \cos x$，二阶导数是 $f''(x) = -\sin x$. 显然 $|f''(x)| \le 1$，于是作为线性插值法的结果所得到的 $\sin 0.754$ 之值，其误差不超过 $1 \times (0.01)^2 = 0.0001$. 对于这个误差估计，我们还必须加上表内所列的数值和插值运算中可能会有的舍入误差.

我们可以把由线性插值法所得到的这个值，同在点 $x = 0.75$ 处用切线来代替正弦曲线时所得到的值进行比较. 从表中查出 $f'(0.75) = \cos 0.75 = 0.7317$，我们得到

$$\begin{aligned}\sin 0.754 &\approx f(0.75) + f'(0.75)(0.004)\\ &= \sin 0.75 + 0.004\cos 0.75 \approx 0.6845.\end{aligned}$$

顺便指出，$\sin 0.754$ 精确到六位有效数字的值是 0.684560.

k. 关于在自然科学中的应用的一点评述

当把数学应用于自然现象时，我们所处理的一些数量决不会是*绝对精确的量*. 一个长度是否*正好*是一米，这个问题不能用任何实验来判断，因而是没有物理意义的. 而且，我们说一个杆件的长度是有理数或无理数，这句话也没有直接的物理意义；我们总是能用有理数来度量其长度而达到任何所要求的精确度，而唯一有意义的问题是我们能否用分母比较小的有理数来设法完成这种度量. 正像在“精确数学”的严格意义下有理性或无理性的问题没有物理意义一样，在应用中实现求极限的过程通常只不过是数学的理想化而已.

这种数学理想化的实际 (和重大的) 意义在于这一事实：通过理想化，解析表达式实质上变得非常简单而比较容易处理. 例如，瞬时速度仅仅是一个确定的时刻的函数，这个观念比两个不同时刻之间的平均速度的观念简单得多，使用起来也比较方便一些. 如果没有这种数学的理想化，对于自然现象的每一项科学研究都肯定会复杂得没法处理，并且在一开始就会陷于困境.

我们不想对数学与现实之间的关系进行哲学上的讨论. 为了更好地理解这一理论，应当着重强调的是在应用中我们完全可以用差商来代替导数，反之亦然，只要二者之差小到能够保证足够精确的近似. 因此，物理学家、生物学家、工程师、以及在实际工作中必须同这些概念打交道的任何其他人，完全可以在自己所要求的精确度的范围内，把差商同导数等同起来. 自变量的增量 $h = dx$ 越小，用微分 $dy = hf'(x)$ 来代替增量 $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ 便越精确. 只要着意于保持在问题所要求的精确度范围内，那么他甚至可以说 $dx = h$ 和 $dy = hf'(x)$ 这些量是“无穷小”. 这些“物理上的无穷小”量具有极其明确的含义. 这些量是经常变动的，在所进行的研究中取有限的但不等于零的、且选得足够小的值，例如小于波长的若干分之一，或小于原子中两个电子之间的距离，一般说来，比所要求的精确度还要小.

2.9 积分、原函数和数积分基本定理

a. 不定积分的导数

正如前面已经讲过的，积分和微分之间的联系乃是微积分学的基础.

在 2.4 节中，我们曾将连续函数 $f(x)$ 的不定积分按下列公式定义为上限变量的函数 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(u)du.$$

其中 α 是 f 的定义域中的任一值. 现在我们来证明:

微积分基本定理 (第一部分). 连续函数 $f(x)$ 的不定积分 $\varphi(x)$,总是具有导数 $\varphi'(x)$, 并且

$$\varphi'(x) = f(x).$$

也就是说, 对连续函数的不定积分进行微分, 总是还原成被积函数, 即

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(u)du = f(x).$$

微分运算和积分运算的这种互逆性质乃是微积分的基本性质, 其证明则是积分学中值定理的一个直接推论. 因为根据中值定理, 对于 f 的定义域中的任何值 x 和 $x+h$, 我们有

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_{x}^{x+h} f(u)du = hf(\xi),$$

其中 ξ 是端点为 x 和 $x+h$ 的区间上的某一个值. 当 h 趋向于零时, 数值 ξ 必定趋向于 x, 于是有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x),$$

因为 f 是连续的. 因此, 正如定理所讲的, $\varphi'(x) = f(x)$

应用 (a) 我们可以应用这个基本定理求得前面已经介绍过的那些函数的导数. 如自然对数曾被定义为不定积分 (当 $x > 0$ 时)

$$\log x = \int_{1}^{x} \frac{1}{u} du.$$

由此立即得到

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

(b) 一般, 以任一数 a 为基底的对数可以表示为下列形式:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

应用常数与函数之积的导数法则，我们得到

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\log a}.$$

(c) 当指数 α 为整数或更一般地为有理数时，我们曾经得到

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

现在我们可将这个公式推广到任意的 α. 为此，我们想到积分公式

$$\int_a^b u^{\beta}du = \frac{1}{\beta+1}(b^{\beta+1} - a^{\beta+1}).$$

对于任何正数 a, b 和任何 $\beta \neq -1$, 我们已证明这个公式. 在这里，如果我们将上限 b 换成变量 x, 并且将等式两端对 x 微分，便可推出

$$x^{\beta} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\beta+1}(x^{\beta+1} - a^{\beta+1}), \text{当}x > 0\text{时}.$$

利用求函数之和的导数以及求常数与函数之积的导数法则，我们可将这个结果写为下列形式:

$$x^{\beta} = \frac{1}{\beta+1}\frac{d}{dx}x^{\beta+1}.$$

用 α 代替 $\beta+1$, 当 $\beta \neq -1$ 即 $\alpha \neq 0$ 时，我们将到公式

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

然而，当 $\alpha = 0$ 时，这个公式当然也成立，因为这时 $x^{\alpha} = 1$, 而常数的导数为零.

b. 原函数及其与积分的关系

微积分基本定理说明，函数 $f(x)$ 的不定积分 $\varphi(x)$ 即上限为变量 x 的积分，是下述问题的解: 给定 $f(x)$, 试确定函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x).$$

这个问题要求我们进行微分过程的逆运算．这是一个典型的反问题，它在许多数学领域中都会出现，并且我们已经看到，这是导致产生新概念的一种卓有成效的数学方法．(例如，由于要求进行某些基本算术运算的逆运算，才提出把自然数的概念加以初步扩充．另外，求已知函数的反函数，便会得到新的类型的函数．)

使得 $F'(x)=f(x)$ 成立的任何函数 $F(x)$，都称为 $f(x)$ 的原函数，这个术语会使我们想到函数 $f(x)$ 是由函数 $F(x)$ 导出来的．

这个微分的逆运算问题即求原函数的问题，乍看起来，同积分的问题性质完全不同．但是，微积分基本定理的第一部分断言：

函数 $f(x)$ 的每一个不定积分 $\varphi(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数．

但是，这个结论并没有完全回答求原函数的问题．因为我们还不知道是否由此就得到了问题的所有的解．下述定理，有时称为微积分基本定理的第二部分，回答了求所有原函数的问题：

同一个函数 $f(x)$ 的两个原函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 之差总是一个常数

$$F_1(x)-F_2(x)=c.$$

因此，从任何一个原函数 $F(x)$，只要适当选取常数 c，便可以得到所有其他的原函数，其形式为

$$F(x)+c$$

反之，对于每一个常数值 c，表达式 $F_1(x)=F(x)+c$ 都表示 $f(x)$ 的原函数．

显然，如果 $F(x)$ 本身是原函数，则对于任何常数 c，函数 $F(x)+c$ 都是原函数．因为我们有（见第 199 页）

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}c=F'(x)=f(x).$$

所以，为了完成上述定理的证明，剩下的只是要证明两个原函数

$F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 之差总是常数. 为此, 我们考虑差

$$F_1(x) - F_2(x) = G(x).$$

显然,

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

然而, 在第 189 页上我们由微分学中值定理已经证明: 其导数在一个区间上处处为零的函数是常数. 因此, G 是常数, 于是定理得证.

把上面证明的微积分基本定理的两部分合并起来, 我们便可将整个定理叙述如下:

微积分基本定理 在一个区间上给定的连续函数 $f(x)$ 的每一个原函数 $F(x)$, 都能表示为下列形式:

$$F(x) = c + \varphi(x) = c + \int_a^x f(u)du,$$

其中 c 和 a 都是常数, 反之, 对于随意[1]选取的任何常数值 a 和 c, 这个表达式总表示一个原函数.

表示法

我们可能会想到, 常数 c 通常可以略去, 因为通过改变下限 a, 我们便可使原函数改变一个附加常数; 也就是说, 所有的原函数都是不定积分. 但是, 如果我们略去 c, 则往往不能得到所有的原函数, 例如 $f(x) = 0$. 对于这个函数, 不论下限如何其不定积分总是等于零; 但是, 任何常数都是 $f(x) = 0$ 的原函数. 第二个例子是函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 这个函数只是对于非负的 x 值才有定义. 其不定积分是

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}},$$

1) 只要 a 处于 f 的定义域之中.

在这里我们看到无论怎样选取下限 a，不定积分总是可以由 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 加上一个小于或等于零的常数 $-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ 而得到。但是像函数 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1$ 也是 $\sqrt{x}$ 的原函数．因此，在原函数的一般表达式中，我们不能略去这一任意附加常数．

由上面求得的关系式使我们想到将不定积分的概念加以扩充，使之包括所有的原函数．今后我们将把每一个形如 $c+\varphi(x)=c+\int_a^x f(u)du$ 的表达式称为 f 的不定积分，并且**不再区分原函数和不定积分**．但是，如果读者需要正确理解这些概念之间的关系，则必须记住：微分的逆运算和积分本来是两回事，而只是在知道了它们之间的关系以后，我们才有理由也使用"不定积分"这个术语称呼原函数．

使用下述表示法完全是一种习惯，在不加以解释时是不十分清楚的：我们记

$$F(x)=\int f(x)dx,$$

指的是：函数 $F(x)$ 是形如

$$F(x)=c+\int_a^x f(u)du$$

的函数，其中 c 和 a 是适当的常数，也就是说，我们略去其上限 x、下限 a 以及附加常数 c，并使用字母 x 来表示积分变量．当然，严格说来，使用同一字母既表示积分变量，又表示上限即 $F(x)$ 的自变量 x，是不大合理的．因为当使用 $\int f(x)dx$ 这种表示法时，我们决不要忘记它本身的不确定性，也就是说，这个符号总是仅仅表示 f 的原函数**之一**．公式 $F(x)=\int f(x)dx$ 只不过是表示关系式

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

的一种符号记法．

c. 用原函数计算定积分

假设我们已知函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$, 并且想要计算定积分 $\int_a^b f(u)du$. 由于我们知道不定积分

$$\varphi(x) = \int_a^x f(u)du$$

也是 $f(x)$ 的原函数, 同 $F(x)$ 只能相差一个附加常数. 因此

$$\varphi(x) = F(x) + c,$$

并且立即可以确定附加常数 c, 因为当 $x = a$ 时不定积分 $\varphi(x) = \int_a^x f(u)du$ 必须等于零. 于是我们得到 $0 = \varphi(a) = F(a) + c$, 由此 $c = -F(a)$, $\varphi(x) = F(x) - F(a)$. 特别是, 对于值 $x = b$, 我们有基本公式

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a),$$

如果

$$F'(u) = f(u).$$

因此, **只要** $F(x)$ **是连续函数** $f(x)$ **的任一原函数, 则** $f(x)$ **在下限** a **和上限** b **之间的定积分等于差** $F(b) - F(a)$.

如果我们利用关系式 $F'(x) = f(x)$, 则基本定理的这个结果还可以写为下列形式:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx = \int_a^b dF(x), \tag{31}$$

其中 $F(x)$ 现在可以是具有连续导数 $F'(x)$ 的任一函数, 并且这里我们使用了莱布尼兹的具有启发性的符号表示法 $dF(x) = F'(x)dx$.

在应用上述法则时, 我们常常用一条竖线来表示端点处函数值之差, 记为

$$\int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

另外，公式 (31) 又可写为下列形式：

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b F'(x)dx. \tag{32}$$

如果回忆起第 159 页上关于函数在一个区间上的平均值的定义，则上述公式说的是：函数 $F(x)$ 对于点 a 和点 b 构成的差商，等于 $F(x)$ 的导数在端点为 a 和 b 的区间上的算术平均值．当我们考虑一个质点在直线上的运动时，曾将距离 s 的改变同时间 t 的改变之比称为“平均速度”．现在我们看到：$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的确正好是速度 $\frac{ds}{dt}$ 在给定的时间间隔上的平均值，如果 t 是构成平均值时所用的自变量．

积分学中值定理同微分学中值定理之间的关系

对于任何连续函数 f 和它的一个原函数 F，公式

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx \tag{33}$$

都成立，这个公式也说明了积分中值定理 (第 158 页) 同微分中值定理 (第 194 页) 之间的关系．由 (33)，根据积分学中值定理，我们推出

$$F(b)-F(a)=(b-a)f(\xi).$$

因为 F 是 f 的原函数，所以我们可以用 $F'(\xi)$ 来代替 $f(\xi)$，从而对于函数 F 得到微分学中值定理．当然，要求 F 具有连续导数这一条件，比微分学中值定理中仅仅要求导数存在的条件是要强一些．

d. 例

在第三章中，我们将广泛应用基本定理来计算积分，现在，我们通过几个例子来说明使用公式

$$\int_a^b \frac{dF(x)}{dx}=F(b)-F(a)$$

的方法．

在第 184 页上，对于正整数 n，我们曾经推出公式

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

这个公式实际上是**二项式定理**的一个明显的结果，因为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(x+h)^n - x^n] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \cdots + h^n - x^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

在下限 a 和上限 b 之间进行积分，我们便得到

$$\int_a^b nx^{n-1}dx = b^n - a^n$$

将 $n-1$ 写为 m，对于整数 $m > 0$，我们得到公式

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1})$$

对 x^m 的积分的表达式的这种推导方法，比在第 147 页上给出的基于区间 $[a,b]$ 的几何划分的推导方法简单得多；而且，现在的结果实际上更为一般，因为我们可以去掉 a 和 b 为正的假设.

在第 186 页上，我们应用三角函数的加法公式并利用

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) = 1,$$

曾得到公式

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

现在进行积分，我们立即得到

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b.$$

这样，由基本定理推导上述积分公式，也要比根据定积分作为和的极限的定义所进行的推导来得简单.

补篇　连续函数的定积分的存在性

我们尚须证明：只要函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的，则 $f(x)$ 在下限 a 和上限 $b(a<b)$ 之间的定积分存在．其证明主要是根据 $f(x)$ 的一致连续性（见第 43 页）：对于任何给定的正数 ϵ，如果区间上任何两点 ξ 和 η 彼此充分接近，则在 ξ 和 η 上 f 值之差小于 ϵ．ξ 和 η 需要接近到怎样的程度，仅仅依赖于 ϵ 而与 ξ 和 η 的位置无关；换句话说，存在一致的连续模 $\delta(\varepsilon)$，使得对于 $[a,b]$ 上的任何值 ξ 和 η，只要 $|\xi-\eta|<\delta$，则有 $|f(\xi)-f(\eta)|<\epsilon$．

将积分定义为和的极限，这要求我们用相继的一些点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 把区间 $[a,b]$ 划分为 n 个部分，其中 $x_0=a, x_n=b$，并且 $x_0<x_1<\cdots<x_n$．设 S_n 表示如上的一个特定分划（n 表示个单元数）．分划的**粗细程度**由所得到的最大单元的长度，即量 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 中的最大者来衡量，我们称之为 S_n 的“跨距 (span)”．由于 f 的一致连续性，所以同一单元中的任何两点上的 f 值之差小于 ϵ，只要 S_n 的跨距小于 $\delta=\delta(\varepsilon)$．在每一个单元 $[x_{i-1},x_i]$ 上选取值 ξ_i，构成

$$F_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

我们便得到基于分划 S_n 的近似和．

我们需要证明的是，对于分划序列 S_n，如果其跨距趋向于零，则近似和 F_n 收敛于某一极限，我们用 $\int_a^b f(x)dx$ 来表示这个极限，进一步还需要证明这个极限值与分划 S_n 以及中间点 ξ_i 的选

择是无关的. 为了进行证明, 我们首先将分别属于两个分划 S_n 和 S_N 的值 F_n 与 F_N 加以比较, 这里 S_n 的跨距小于 δ, 而分划 S_N 是分划 S_n 的"加细", 也就是说, 所有 S_n 的分点都是 S_N 的分点. 适当地改变一下写法, 我们有

$$F_N = \sum_{j=1}^{N} f(\eta_j)\Delta y_j,$$

其中数值 y_j 是 S_N 的分点, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, η_j 在区间 $[y_{j-1}, y_j]$ 上. S_n 的两个相继的分点 x_{i-1} 和 x_i 也在数值 y_i 之中出现, 譬如说, $x_{i-1} = y_{r-1}, x_i = y_s$. 在 S_N 中, 单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 可能被分成一些更小的区间, 譬如说分成 $[y_{r-1}, y_r], [y_r, y_{r+1}], \cdots, [y_{s-1}, y_s]$, 此时, 它们在 F_N 的组成部分是

$$\sum_{j=r}^{s} f(\eta_j)(y_j - y_{j-1})$$

我们把它与单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 在 F_n 中的部分 $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 加以比较, 因后者可以写成

$$\sum_{j=r}^{s} f(\xi_i)(y_j - y_{j-1})$$

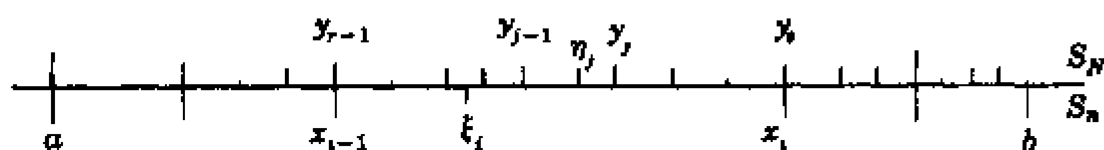


图 2.33

(见图 2.33), 此时求得两个部分之差的绝对值为

$$\left|\sum_{j=r}^{s}[f(\eta_j) - f(\xi_i)](y_j - y_{j-1})\right|$$
$$\leq \sum_{j=r}^{s} \epsilon \cdot (y_j - y_{j-1}) = \epsilon(x_i - x_{i-1}).$$

因此，对于 S_n 的一切单元 $[x_{i-1}, x_i]$，把在 F_n 中的部分和对 F_N 的相应部分之差全部加起来，我们则得到估值

$$|F_N - F_n| < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a),$$

只要 S_n 的跨距小于 $\delta(\varepsilon)$，且 S_N 是 S_n 的加细.

现在如果 S_n 和 S_m 是任意两个分划，我们则可考虑由 S_n 的一切分点和 S_m 的一切分点合在一起构成的分划 S_N. 这时，S_N 既是 S_n 的加细又是 S_m 的加细. 假设 S_n 和 S_m 的跨距都小于 $\delta(\varepsilon)$，我们任选 S_N 的各单元的中间点 η_j 来给出 F_N，便得到

$$\begin{aligned}|F_n - F_m| &= |(F_n - F_N) + (F_N - F_m)| \\ &\le |F_n - F_N| + |F_m - F_N| \le 2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

于是我们看到，如果任给两个分划，它们跨距都充分小，那么与此相应的近似和彼此相差可任意小. 现在我们考虑任何的分划序列 S_n，当 $n \to \infty$ 时其跨距趋向于零. 设 F_n 是对应的近似和，则当给定任何 $\varepsilon > 0$ 时，对于一切充分大的 n，S_n 的跨距都小于 $\delta(\varepsilon)$. 因此，当 n 和 m 都充分大时，有

$$|F_n - F_m| < 2\varepsilon(b - a).$$

由此可知，序列 F_n 满足柯西收敛判别法 (见第 106 页)；于是

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F$$

存在.

剩下的是要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$ 之值与分划和中间点的选择无关. 这时，如果 S'_n 表示跨距趋向于零的任一其他的分划序列，则对应的和 F'_n 具有极限 F'. 因为只要 S_n 和 S'_n 的跨距都小于 $\delta(\varepsilon)$，就有

$$|F'_n - F_n| < 2\varepsilon(b - a),$$

所以当 $n\to\infty$ 时，我们也会得到 $|F-F'|\le 2\varepsilon(b-a)$. 既然这里 ε 是任意正数，就可以推出 $F=F'$. 因此，极限 F 唯一确定，我们用 $\int_a^b f(x)dx$ 来表示.

连续函数的定积分的存在性，其证明至此完成.

更一般的近似和 我们上面进行的证明，实际上比较清晰地指出了用和式来逼近积分时什么是基本点. 它说明了这样的事实，即建立更一般的求极限过程，也能导致积分. 并且下述形式更一般的定理成立：为了使和式 $F_n=\sum f_i\Delta x_i$ 收敛于积分，f_i 不一定是一个函数值；而只要对于区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的某个点 ξ_i，有 $|f_i-f(\xi_i)|<\delta(\varepsilon)$ 便足够了，这里当 $\varepsilon\to0$ 时 $\delta(\varepsilon)\to0$.

这个一般的命题常常是有用的. 例如，如果 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$，则代替和式 $\Sigma f(\xi_\nu)\Delta x_\nu$，我们可以考虑更一般的和

$$\Sigma\varphi(\xi'_\nu)\psi(\xi''_\nu)\Delta x_\nu,$$

其中 ξ'_ν 和 ξ''_ν 是该单元上不一定重合的两个点. 当 n 增加时，这个和式也趋向于积分

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx,$$

只要最大区间的长度趋向于零.

对于用类似的方式建立的另一些和式，相应的命题也成立；例如，和式

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\varphi(\xi'_\nu)^2+\psi(\xi''_\nu)^2}\,\Delta x_\nu$$

收敛于积分

$$\int_a^b\sqrt{\varphi(x)^2+\psi(x)^2}\,dx.$$

为了证明这些命题，我们只需指出，由于 ξ'_ν 和 ξ''_ν 的偏差而引起的近似和的改变 D 在取极限的情况下趋向于零. 在第一个例子

中，这一点是明显的．其中近似和的改变是

$$D = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\xi'_\nu)[\psi(\xi''_\nu) - \psi(\xi'_\nu)]\Delta x_\nu$$

因为 φ 是有界的，ψ 是一致连续的．所以通过把单元取得充分小，可以使得 D 为任意小．

第二个例中的和式的改变可以表示为

$$D = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sqrt{\varphi(\xi'_\nu)^2 + \psi(\xi''_\nu)^2} - \sqrt{\varphi(\xi'_\nu)^2 + \psi(\xi'_\nu)^2}\right)\Delta x_\nu.$$

利用以顶点为 $(a,0),(0,b),(0,c)$ 的三角形的三角不等式：$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| < |b-c|$，我们得到

$$\left|\sqrt{\varphi(\xi'_\nu)^2 + \psi(\xi''_\nu)^2} - \sqrt{\varphi(\xi'_\nu)^2 + \psi(\xi'_\nu)^2}\right| < |\psi(\xi''_\nu) - \psi(\xi'_\nu)|,$$

由此即可推知，D 趋向于零．

问　　题

2.1 节，第 135 页

1. 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的正值单调函数，其中 $0 < a < b$；又 φ 是 f 的反函数，并且设 $\alpha = f(a), \beta = f(b)$．试用积分是面积的观念证明

$$\int_\alpha^\beta \varphi(y)dy = b\beta - a\alpha - \int_a^b f(x)dx$$

2.2 节，第 143 页

1. 试通过将区间 $[a,b]$ 划分为长度相等的单元，来证明：对于任何自然数 p，有

$$\int_a^b x^p dx = \frac{1}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}).$$

试应用第一章杂题 5 到 12 中的方法来计算近似和 F_n.

2. 当 α 是负的有理数时，譬如说 $\alpha=-\frac{r}{s}$ 时，其中 r 和 s 是自然数，试导出 $\int_a^b x^\alpha dx(a, b>0)$ 的公式. $\Big[$提示：设 $q^{\frac{1}{s}}=\tau$，其中 $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.\Big]$

3. 试按照求 $\sin x$ 的积分时所用的方法，推导公式

$$\int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a.$$

4. 当 $f(x)$ 是：(a) 奇函数时，(b) 偶函数时，试建立关于 $\int_{-a}^{a} f(x) dx$ 的一般性结论.

5. 试计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$，并从几何的角度来解释为什么这两个积分具有相同的值；并且解释为什么对于一切 a 值和 b 值有

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x dx=\int_a^{b+2\pi} \cos x dx$$

6. 试计算：(a) $I_n=\int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx$，(b) $I_n=\int_0^a x^n dx$. $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} I_n$ 是什么？并在几何上加以解释.

7. 试计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2.3 节，第 153 页

*1. 关于积分的柯西不等式. 试证明：对于一切连续函数 $f(x), g(x)$ 有

$$\int_a^b[f(x)]^2 dx \int_a^b[g(x)]^2 dx \geqslant\left(\int_a^b f(x) g(x) dx\right)^2.$$

*2. 试证明：如果 $f(x)$ 是连续的，并且

$$f(x)=\int_0^x f(t) dt,$$

则 $f(x)$ 恒为零.

*3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是利普希茨连续的；即对于这个区间上的一切 x, y, 有

$$|f(x)-f(y)| < M|x-y|.$$

试证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{M}{2n}.$$

2.5 节，第 163 页

1. 试证明

$$\log\frac{p}{q} \le \frac{p-q}{\sqrt{pq}} \qquad (q \le p)$$

[提示：应用柯西不等式，2.3 节，问题 1.]

2 (a) 试验证

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+u}du, \text{其中} x > -1$$

(b) 试证明：当 $x>0$ 时，有

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

*(c) 更一般地，试证明：当 $0<x<1$ 时，有

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n}}{2n} < \log(1+x) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

[提示：将 $\frac{1}{1+u}$ 同几何级数加以比较.]

2.6 节，第 168 页

1. (a) 试通过将区间 $[a,b]$ 划分为相等的单元来证明：

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

[提示: 应用 $\log\alpha = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\alpha}-1)$.]

(b) 试求 $\int_a^b \log x dx$ (见 2.1 节，问题 1)

(c) 试证明：当 $x \geq 0$ 时，有

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} < e^x < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\left[\text{提示: 求出} \int_0^x e^u du \text{ 的上界估值和下界估值，并反复进行积分.}\right]$

当 $x < 0$ 时，试求得对于 e^x 的同样类型的估值.

2.8 节 c, 第 184 页

试直接按照导数 (作为函数差商的极限) 的定义，来计算下列函数的导数.

1. $\tan x$.
2. $\sec^2 x$.
3. $\sin\sqrt{x}$
4. $\sqrt{\sin x}$.
5. $\dfrac{1}{\sin x}$.
6. $\sin\dfrac{1}{x}$.
7. x^α, 其中 α 是负的有理数.

2.8 节 i, 第 196 页

1. 试证明：当 $x > 0$ 时，$x > \sin x$; 当 x 处于 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 之中时，$x < \tan x$.

2. 设在 $a \leq x \leq b$ 上 $f(x)$ 是连续的且是可微的，试证明：如果当 $a \leq x < \xi$ 时 $f'(x) < 0$, 而当 $\xi < x < b$ 时 $f'(x) \geq 0$, 则这个函数总不会小于 $f(\xi)$.

*3. 如果连续函数 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 的领域内的每一点 x 都具有导数 $f'(x)$, 并且当 $x \to \xi$ 时 $f'(x)$ 趋向于极限 L, 则 $f'(\xi)$ 存在并且等于 L.

*4. 设 $f(x)$ 在整个 x 轴上有定义并且是可微的. 试证明: 如果 $f(0) = 0$ 并且处处有 $|f'(x)| \leq |f(x)|$, 则恒有 $f(x)=0$.

2.9 节, 第 207 页

*1 如果质点在一单位时间内经过一单位距离, 且在起点和终点均处于静止状态, 则在这个单位时间间隔内的某一时刻上, 此质点运动的加速度必定等于或大于 4.

补篇, 第 216 页, 定积分的存在性

1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义和有界. 我们对分划

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

定义"上和"Σ 以及"下和"σ 如下

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

其中 M_i 和 m_i 分别为 $f(x)$ 在单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最小上界和最大下界.

(a) 试证明: 对给定分划作任一加细分划, 上和之值或是减少或是保持不变, 类似地, 下和之值或是增加或是保持不变.

(b) 试证明: 每一个上和之值大于或等于每一个下和之值.

(c) 达布(Darboux)上积分 F^+ 定义为对一切分划上和的最大下界, 达布下积分 F^- 定义为对一切分划下和的最小上界. 由 (b) 可知, $F^+ \geq F^-$. 如果 $F^+ = F^-$, 我们就将这个共同的值称为 f 的达布积分. 试证明: f 的达布积分实际上就是普通的黎曼积分; 并且证明: 当且仅当达布上积分和达布下积分存在并且相等时, 黎曼积分存在.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调函数.

(a) 试证明：当把区间划分为 n 个相等的单元时，上和与下和之差正好由下式给出：

$$\Sigma - \sigma = [f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n},$$

并将这个结果从几何上加以解释.

(b) 试利用 (a) 的结果证明其达布积分存在.

(c) 如果划分的单元可以是不相等的，试通过 $f(a), f(b)$ 和划分的跨距来估计 $\Sigma - \sigma$.

(d) 大量的函数 $f(x)$ 如果不是单调的，则可以写为单调函数之和，$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$，其中 φ 是非增的，ψ 是非减的. 在这种情况下，试估计上和与下和之差.

3. 试证明：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的导数，则 $f(x)$ 可以像问题 2(d) 中那样写为单调函数之和.

杂题

1. 试证明：

(a) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2dx = \frac{16}{15}$;

(b) $(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

2. 对于二项式系数 $\binom{n}{k}$，试证明：

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right]^{-1}.$$

*3. 如果 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 的每一点 x 上都具有导数 $f'(x)$(不一定是连续的)，并且如果 $f'(x)$ 取到值 m 和 M，试证明 $f'(x)$ 也取 m 和 M 之间的每一个值 μ.

4. 如果对于 $a \le x \le b$ 上的一切 x 值，$f''(x) \ge 0$，试证明 $y = f(x)$ 的图形位于任一点 $(x = \xi, y = f(\xi))$ 处的切线上或其上方.

5. 如果对于 $a \leq x < b$ 上的一切 x 值，$f''(x) \geq 0$，试证明 $y = f(x)$ 在区间 $x_1 \leq x \leq x_2$ 上的图形，位于连接图形在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 上的两点的线段的下方.

6. 如果 $f'' \geq 0$ 试证明 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

*7. 设 $f(x)$ 是这样的函数，即对于一切 x 值有 $f''(x) \geq 0$，而 $u = u(t)$ 是任意一个连续函数，试证明

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt > f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)$$

8. (a) 试直接对下述函数进行微分，并写出对应的积分公式：(i) $x^{\frac{1}{2}}$，(ii) $\tan x$.

(b) 试计算

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(1 + \sec^2\frac{\pi}{4n} + \sec^2\frac{2\pi}{4n} + \cdots + \sec^2\frac{n\pi}{4n}\right)$$

9. 设对于一切实数 x 值，$f(x)$ 具有一阶和二阶导数. 试证明：如果 $f(x)$ 处处是正的和上凸的，则 $f(x)$ 是常数.

(对于连续函数 $\varphi(x)$ 的定义区间上的任意二点 x_1 x_2，如果恒有

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)],$$

则称 $\varphi(x)$ 为下凸函数；如果恒有

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)],$$

则称 $\varphi(x)$ 为上凸函数. —— 译者注)

第三章　微分法和积分法

第一部分　初等函数的微分和积分

3.1　最简单的微分法则及其应用

虽然积分问题通常比微分问题更为重要，但是微分问题在形式上却要比积分问题容易一些．因此，自然的做法是：首先掌握微分可能遇到的各种类型的函数的微分方法，然后根据微积分基本定理（2.9 节），利用微分法的结果来计算积分．在后面的几节里，我们将讨论基本定理的这种应用．在一定程度上来说，我们是从头开始，并根据某些一般的微分法则来系统地阐述积分法．

a. 微分法则

我们假设所考虑的区间上函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是可微的；这时，下述基本法则成立．

法则 1　乘以常数．对于任何常数 c，函数 $\varphi(x)=cf(x)$ 是可微的，并且

$$\varphi'(x)=cf'(x). \tag{1}$$

其证明是显而易见的，在第二章第 187 页上已经给出．

法则 2　和的导数　如果 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$，则 $\varphi(x)$ 是可微的，并且

$$\varphi'(x)=f'(x)+g'(x); \tag{2}$$

也就是说，微分运算与加法运算是可以交换的．对可微函数的和

$$\varphi(x) = \sum_{v=1}^{n} f_v(x)$$

同样的法则也成立，即

$$\varphi'(x) = \sum_{v=1}^{n} f'_v(x)$$

其证明也是显而易见的，由导数的定义即可得到.

法则 3 乘积的导数. 如果 $\varphi(x) = f(x)g(x)$, 则 $\varphi(x)$ 是可微的，并且

$$\varphi'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3}$$

其证明可以由下式得到:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\end{aligned}$$

当 $h \to 0$ 时，此式的极限便是式 (3).

如果我们将此公式除以[1] $\varphi(x) = f(x)g(x)$, 则它在形式上会变得更为完美. 这时，我们得到

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

使用微分表示法 (第二章第 192 页), 还可将公式 (3) 写为

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

对于 n 个因子之乘积的导数，我们用数学归纳法可以得到一个含有 n 项的表达式，其中每一项都是由一个因子的导数乘以原乘积中的其他所有因子而组成的:

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)]$$

1) 当然，我们必须假设 $\varphi(x)$ 处处不等于零.

$$
\begin{aligned}
&= f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) \\
&\quad + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x) \\
&= \sum_{v=1}^{n} f_v'(x)\frac{\varphi(x)}{f_v(x)}.
\end{aligned}
$$

或者除以 $\varphi(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$，则有

$$
\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \sum_{v=1}^{n}\frac{f_v'(x)}{f_v(x)},
$$

当然这是在 $\varphi(x) \neq 0$ 之处成立.

重复应用关于乘积的导数法则，我们也能得到**二阶导数和高阶导数的公式**. 对于二阶导数，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 fg}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dfg}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(f\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(f\frac{dg}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}g\right) \\
&= f\frac{d^2 g}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \frac{d^2 f}{dx^2}g.
\end{aligned}
$$

莱布尼兹法则 读者可用数学归纳法证明：乘积的 n 阶导数能够按下列法则（莱布尼兹法则）得到.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}(fg) = f\frac{d^n g}{dx^n} &+ \binom{n}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} \\
&+ \binom{n}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \cdots \\
&+ \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\frac{dg}{dx} + \frac{d^n f}{dx^n}g.
\end{aligned}
$$

这里 $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{1}{2!}[n(n-1)], \cdots$，等等，表示二项式系数.

法则 4 **商的导数**. 对于商

$$
\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)},
$$

下述法则成立：函数 $\varphi(x)$ 在 $g(x)$ 不为零的每一点上是可微的，并且

$$\varphi'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}. \tag{4}$$

如果 $\varphi(x)\neq 0$，这个公式可以写为

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

证明 如果假设 $\varphi(x)$ 是可微的，我们则可对 $f(x)=\varphi(x)g(x)$ 应用关于乘积的导数法则，并且得到

$$f'(x)=\varphi(x)g'(x)+g(x)\varphi'(x)$$

用 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 来代替右端的 $\varphi(x)$，并且解出 $\varphi'(x)$，我们便得到法则 4

我们可以在证明这个法则的同时来证明 $\varphi(x)$ 的可微性，只要我们写出

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x)g(x+h)}.$$

现在令 h 趋向于零，就得到上述结果；因为根据假设，分母不趋向于零而趋向于极限 $[g(x)]^2$，分子中的两项分别具有极限 $g(x)f'(x)$ 和 $g'(x)f(x)$．这样既证明了左端的极限的存在，又证明了微分公式成立.

b．有理函数的微分法

首先，我们借助于乘积的微分法则，再次推导下述公式，即对于每一个正整数 n，

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

我们将 x^n 看作为 n 个因子之积，$x^n = x \cdots x$，于是得到

$$\frac{d}{dx}x^n = 1\cdot x^{n-1} + 1\cdot x^{n-1} + \cdots + 1\cdot x^{n-1} = nx^{n-1}$$

由这个公式以及公式(1)，可以推出函数 x^n 的二阶导数

$$\frac{d^2}{dx^2}x^n = n(n-1)x^{n-2}$$

继续进行下去，我们便得到高阶导数

$$\frac{d^3}{dx^3}x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n = 1\cdot 2\cdots n = n!$$

从最后一个公式可知，x^n 的 n 阶导数为常数，而 $n+1$ 阶导数则（处处）为零.

使用前两个法则以及幂函数的微分法则，实际上可以微分任何多项式 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，从而得到

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1},$$

以及

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2},$$

如此等等.

现在，我们可以借助于商的微分法则求得任何有理函数的导数. 特别是，当 $n=-m$ 是负整数时，我们还可以再次推出函数 x^n 的微分公式：应用商的微分法则，并注意到常数的导数为零，就得到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}},$$

或者，令 $m=-n$，则有

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

这在形式上同 n 为正值时的公式以及从前得到的公式 (第 185 页) 都是一致的.

c. 三角函数的微分法

对于三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$, 我们已经得到 (第 186 页) 微分公式

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \text{ 和 } \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

现在, 我们就可以利用商的微分法则来微分函数

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \text{ 和 } y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

根据商的微分法则, 前一个函数的导数是

$$y'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

因此

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\tan^2 x.$$

类似地, 我们得到

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x=-(1+\cot^2 x)$$

与 $\sin x, \cos x, \tan x$ 和 $\cot x$ 的微分公式相对应的积分公式如下:

$$\int \cos x\,dx=\sin x, \quad \int \sin x\,dx=-\cos x,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x.$$

利用 2.9 节 (第 213 页) 的基本法则, 再从这些公式我们可以求得在任何积分限之间的定积分值, 唯一的限制是: 当使用后两个公式时, 积分区间不能包含被积函数的任何间断点, 即对第一个积分是

不含 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍之点，对第二个积分是不含 $\frac{\pi}{2}$ 的偶数倍之点.
例如

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

3.2 反函数的导数

a. 一般公式

在第 49 页上我们已经看到，连续函数 $y = f(x)$ 在其成为单调的每一个区间上具有连续的反函数. 确切地说：

如果在区间 $a \leq x \leq b$ 上的连续函数 $y = f(x)$ 是单调的，并且 $f(a) = \alpha$ 和 $f(b) = \beta$，则 f 具有一个在 α 和 β 之间的区间上为连续和单调的反函数.

又如第 199 页上所述，导数的符号为判断一个函数何时是单调的因而具有反函数提供了一个简单的判别法. 一个可微函数 $f(x)$ 是连续的，在 $f'(x)$ 处处大于零的区间上是单调增加的，在 $f'(x)$ 处处小于零的区间上是单调减少的.

现在我们通过证明下述定理来研究反函数的导数的问题.

定理 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $a < x < b$ 内是可微的，并且在整个区间内或是 $f'(x) > 0$ 或是 $f'(x) < 0$ 则反函数 $x = \varphi(y)$ 在其定义区间的每一个内点上也具有导数. $y = f(x)$ 的导数同其反函数 $x = \varphi(y)$ 的导数，在相应的 x 值和 y 值上，满足关系式 $f'(x) \cdot \varphi'(x) = 1$

这个关系式也可写为下列形式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{5}$$

最后这个公式再次说明莱布尼兹表示法的适用性：符号的商 $\frac{dy}{dx}$ 在公式中可以当作真正的分数来处理．

证明 这个定理的证明是很简单的．把导数写成差商的极限，即

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1\to x}\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

其中 x 和 $y = f(x)$，x_1 和 $y_1 = f(x_1)$ 分别表示两对相应的值．根据假设，第一个极限值不等于零．由于 $y = f(x)$ 和 $x = \varphi(y)$ 的连续性，所以关系式 $y_1 \to y$ 和 $x_1 \to x$ 是等价的．因此，极限值

$$\lim_{x_1\to x}\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \lim_{y_1\to y}\frac{x_1 - x}{y_1 - y}$$

存在并且等于 $\frac{1}{f'(x)}$．另一方面，根据定义，上式右端的极限值是反函数 $\varphi(y)$ 的导数 $\varphi'(y)$，因而公式 (5) 得证．

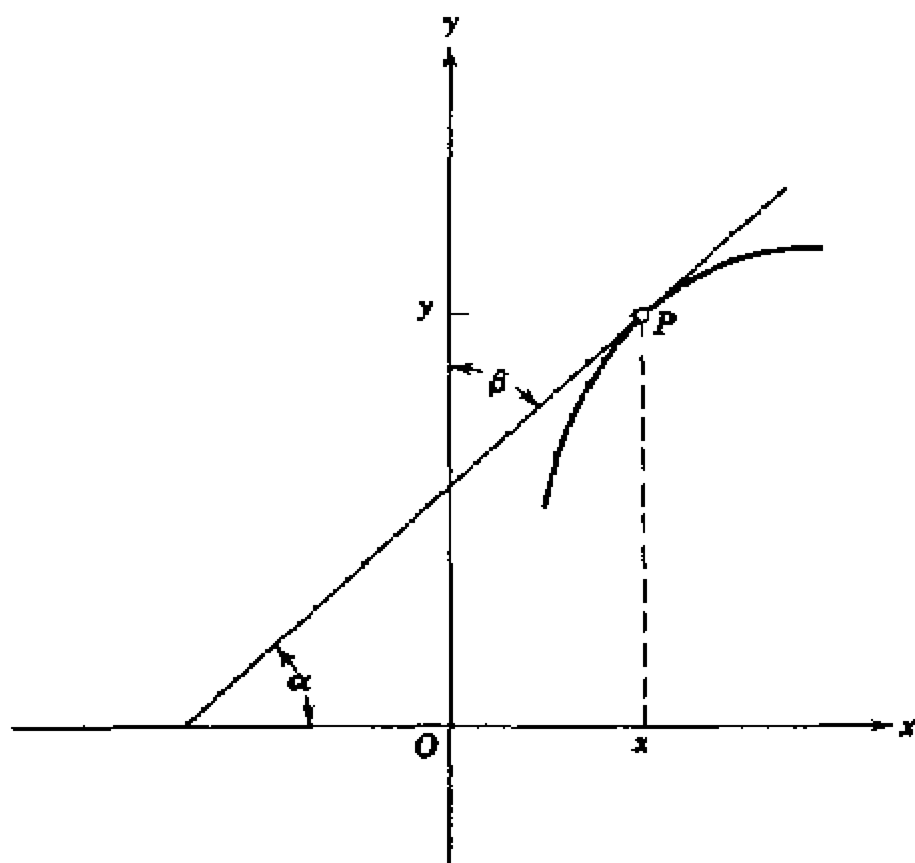


图 3.1 反函数的微分法

此公式 (5) 的几何意义很简单，由图 3.1 即可说明．曲线 $y = f(x)$ 或 $x = \varphi(y)$ 的切线同正 x 轴构成角 α，同正 y 轴构成角 β；由

于函数的导数在几何上用切线的斜率来解释，所以有

$$f'(x)=\tan\alpha,\quad \varphi'(y)=\tan\beta.$$

由于角 α 和 β 之和为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan\alpha\tan\beta=1$，这个关系式同上述微分公式是完全等价的.

临界点

在上面的讨论中我们总是明确地假设 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，即 $f'(x)$ 不为零. 那么，如果 $f'(x)=0$，会发生什么情况呢？如果在一个区间上处处有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 是常数，由于这个区间上的一切 x 值都对应着同样的 y 值，因而没有反函数. 如果只是在一些孤立的所谓“临界”点上 $f'(x)=0$ (并且假设 $f'(x)$ 是连续的)，那么按照自变量 x 通过这些临界点时 $f'(x)$ 是否变号，就存在着两种情况. 在第一种情况下，这个临界点将函数单调增加的点和函数是单调减少的点分隔开，在这种临界点的领域内不能存在单值的

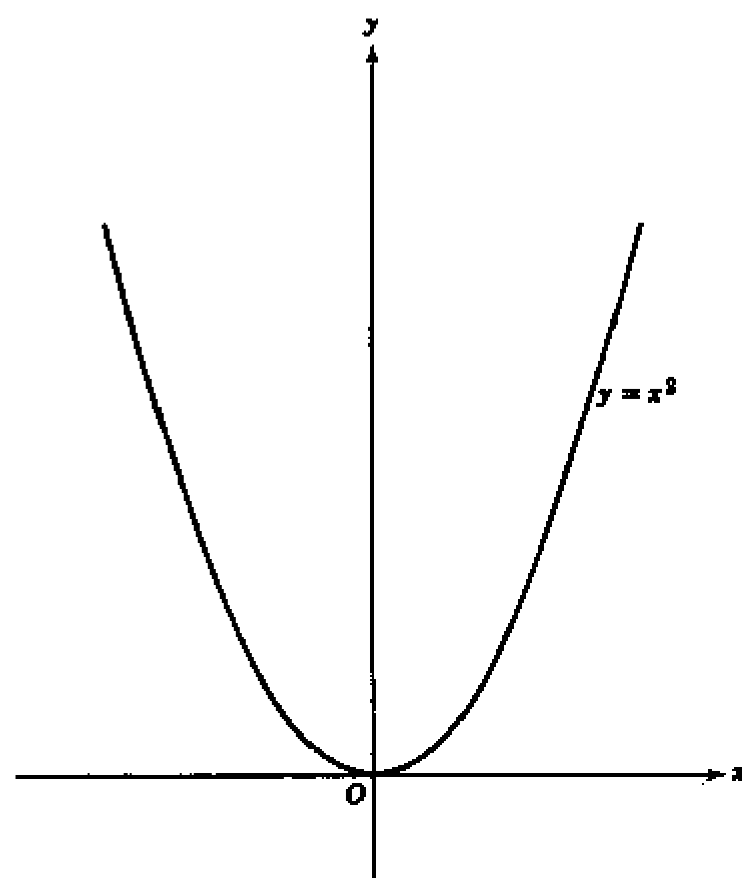


图 3.2　抛物线

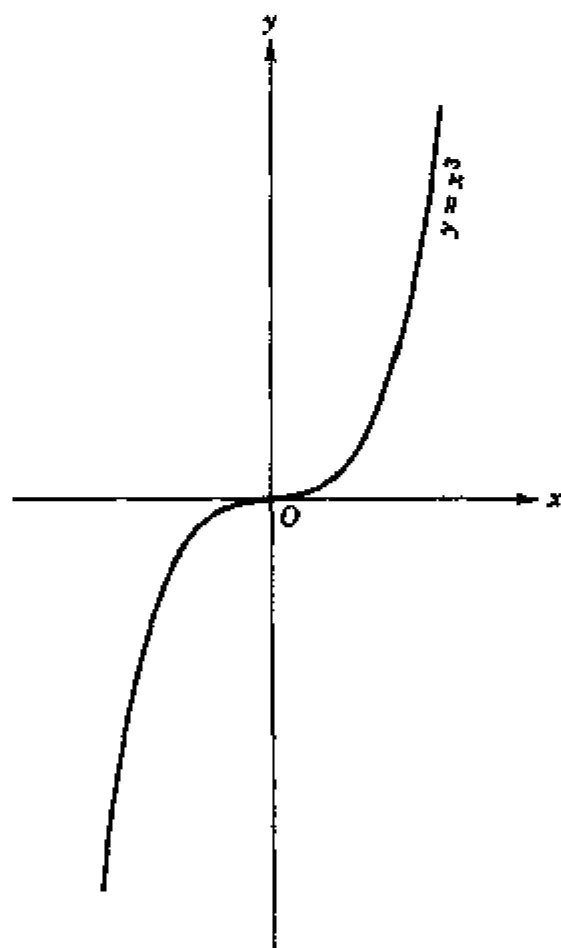


图 3.3　立方抛物线

反函数. 在第二种情况下, 导数虽然等于零但在此点附近并不改变函数 $y = f(x)$ 的单调性质, 因此存在单值的反函数. 然而, 在相应的点上, 反函数不再是可微的; 事实上, 反函数的导数在该点是无穷大. 函数 $y = x^2$ 和 $y = x^3$ 在点 $x = 0$, 便是这两种情况的实例. 图 3.2 和图 3.3 分别说明这两个函数通过原点时的性状, 同时说明函数 $y = x^3$ 具有单值的反函数, 而函数 $y = x^2$ 则没有单值的反函数.

b. n 次幂的反函数: n 次根

当 n 为正整数时, 函数 $y = x^n$ 的反函数是一个最简单的例子; 首先我们假设 x 取正值, 因此 y 也取正值. 在这些条件下, y' 总是正的, 于是对于一切正的 y 值, 我们可以建立唯一的反函数

$$x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

再由前面的一般法则，立即可得到这个反函数的导数如下

$$\frac{d(y^{\frac{1}{n}})}{dy}=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

现在，如果我们改变表示法，仍用 x 来表示自变量，则最后可写成

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$$

这同第 185 页上得到的公式是一致的.

当 $n>1$ 时，点 $x=0$ 需要特别加以考虑. 如果 x 通过正值趋向于零，则 $\frac{d(x^{\frac{1}{n}})}{dx}$ 显然无限增加；这种情况正相应于 n 次幂 $f(x)=x^n$ 的导数在原点等于零. 在几何上这意味着，当 $n>1$ 时曲线 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 在原点与 y 轴相切 (参见第 52 页图 1.35).

应当指出，当 n 为奇数时，$x>0$ 的假设可以省去，函数 $y=x^n$ 是单调的，并且在整个实数域上具有反函数. 对于负的 y 值，公式

$$\frac{d(\sqrt[n]{y})}{dy}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

仍然成立；而当 $x=0, n>1$ 时，我们有 $\frac{dx^n}{dx}=0$，这种情况正相应于反函数的导数 $\frac{dx}{dy}$ 在点 $y=0$ 是无穷大.

c. 反三角函数 —— 多值性

为了建立三角函数的反函数，我们再次考虑 $\sin x, \cos x, \tan x$ 和 $\cot x$ 的图形 [1)]，由第 54 页图 1.37 和第 55 页图 1.38，我们立即看出，对于这些函数中的每一个来说，如果我们要讨论的是唯一的一个反函数，则必须选取一定的区间；因为平行于 x 轴的直线 $y=c$，如果同曲线相交，会相交于无穷多个点.

1) 图形表示法有助于读者克服在讨论反函数的"多值性"时存在的某些困难.

反正弦和反余弦

例如，对于函数 $y=\sin x$（图 3.4），在区间 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 内，导数 $y'=\cos x$ 是正的．在这个区间内，$y=\sin x$ 具有反函数，我们用[1]

$$x=\arcsin y$$

来表示（这个反函数表示一个角，其正弦之值为 y）．当 y 依次遍及从 -1 到 $+1$ 的区间时，这个函数由 $-\frac{\pi}{2}$ 单调地增加到 $+\frac{\pi}{2}$．如果我们想要强调的是在这个特定的区间内来考虑正弦函数的反函数，我们就说是反正弦函数的**主值**．对于使得 $\sin x$ 是单调的另一个区间，例如区间 $+\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，我们就得到另一个反函数或反正弦函数的另一个"**分支**"．如果没有明确地说出反函数之值所在的区间，则反正弦的符号并不表示一个完全确定的函数，而事实上，它表示**无穷多个值**[2]．

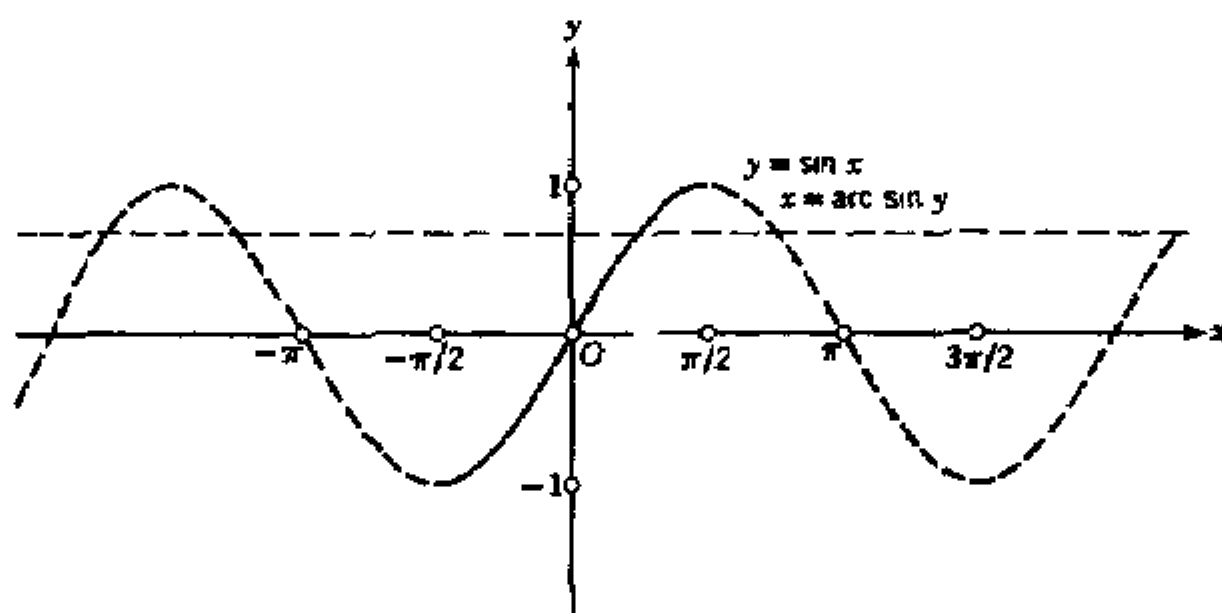


图 3.4　$y=\sin x$ 的图形（实线表示主值）

$\arcsin y$ 的多值性可以表述如下：对于任何一个正弦值 y，与其

---

1) 也用另一种符号表示法：$x=\sin^{-1}y$，这同**倒数**函数 $\frac{1}{\sin x}$ 不会混淆．

2) 有时也称为多值函数

相对应的不只是一个特定的角 x, 而且还有其他形式为 $2k\pi + x$ 或 $(2k+1)\pi - x$ 的角, 其中 k 是任何整数 (见图 3.4)

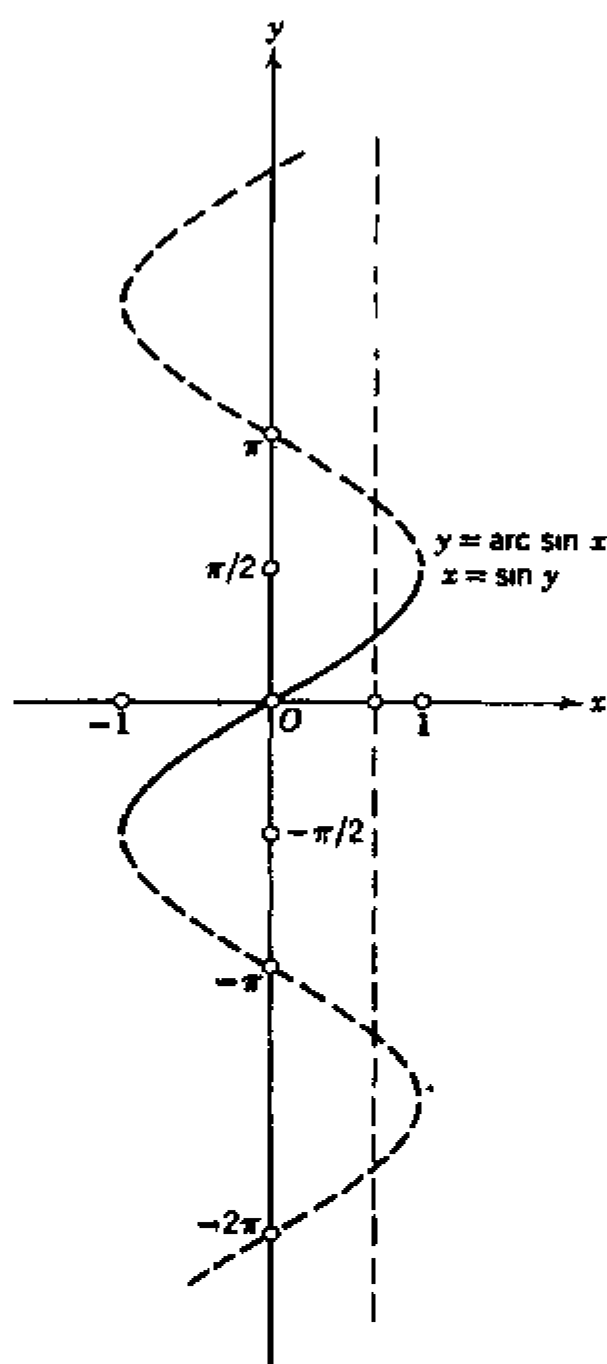


图 3.5 $y = \arcsin x$ 的图形
(实线表示主值)

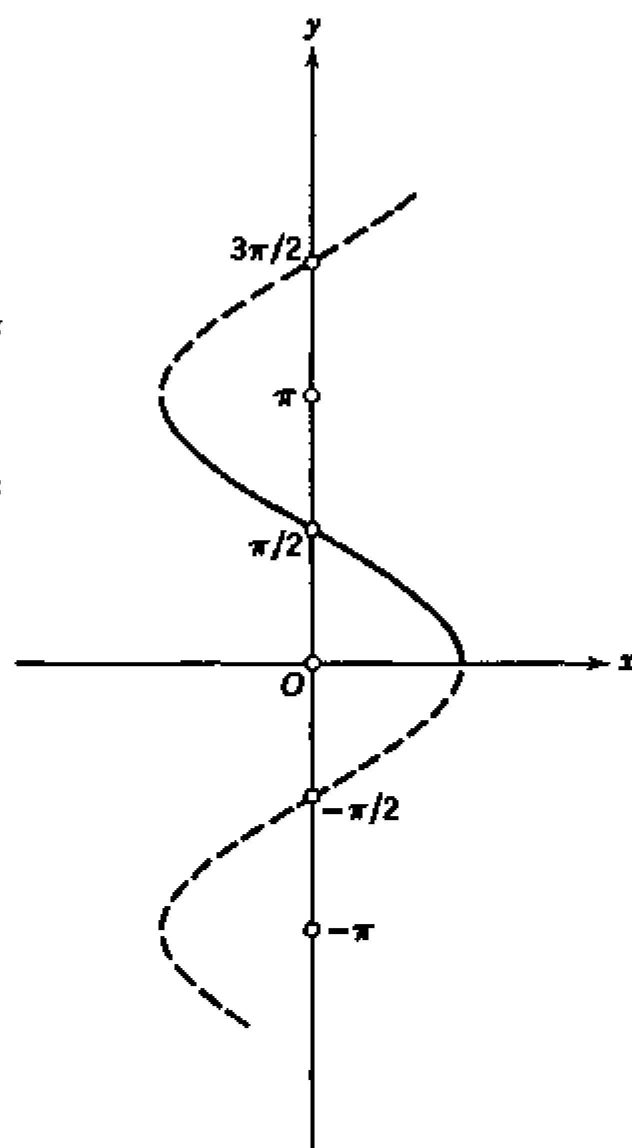


图 3.6 $y = \arccos x$ 的形图
(实线表示主值)

由关系式 (5), 我们可以得到函数 $x = \arcsin y$ 的导数如下:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-y^2}},$$

如果我们只限于考虑上面提到的前一个区间, 即 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 则

上式中平方根应取正号[1].

最后，我们把自变量的记法由 y 换为常用的 x（图 3.5），这时 $\arcsin x$ 的导数则表示为

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

这里假设 $\arcsin x$ 是位于 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的主值，平方根取正号.

对于 $y=\cos x$ 的反函数，我们（当把变量的记法 x 和 y 交换以后）用 $\arccos x$ 来表示，并可以用完全相同的方法得到公式

$$\frac{d}{dx}\arccos x=\mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这里，如果 $\arccos x$ 在 0 和 π 之间（而不是像在 $\arcsin x$ 的情况那样在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间）的区间内取值，则平方根取负号（见图 3.6）.

当自变量趋近于端点 $x=-1$ 和 $x=1$ 时，这些导数变为无穷大，这种情况正相应于反正弦和反余弦的图形在这些端点上具有垂直的切线.

反正切和反余切

我们用类似的方式来讨论正切和余切的反函数. 对函数 $y=\tan x$，当 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时其导数处处为正. 因而在区间 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 内具有唯一的反函数. 我们记这个反函数为 $x=\arctan y$（的**主支**）. 由图 3.7，我们立即看出，可以选取任何值 $y+k\pi$（其中 k 为整数）来代替 y. 类似地，函数 $y=\cot x$ 具有反函数 $x=\operatorname{arccot} y$，如果我们要求这个反函数的值位于由 0 到 π 的区间内，则它也是唯一确定的；反之，$\operatorname{arccot} x$ 同 $\arctan x$ 一样，是多值的.

---

1) 如果我们考虑的不是区间 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 而是区间 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，这相当于用 $x+\pi$ 来代替 x，则平方根应取负号，因为 $\cos x$ 在这个区间上是负的.

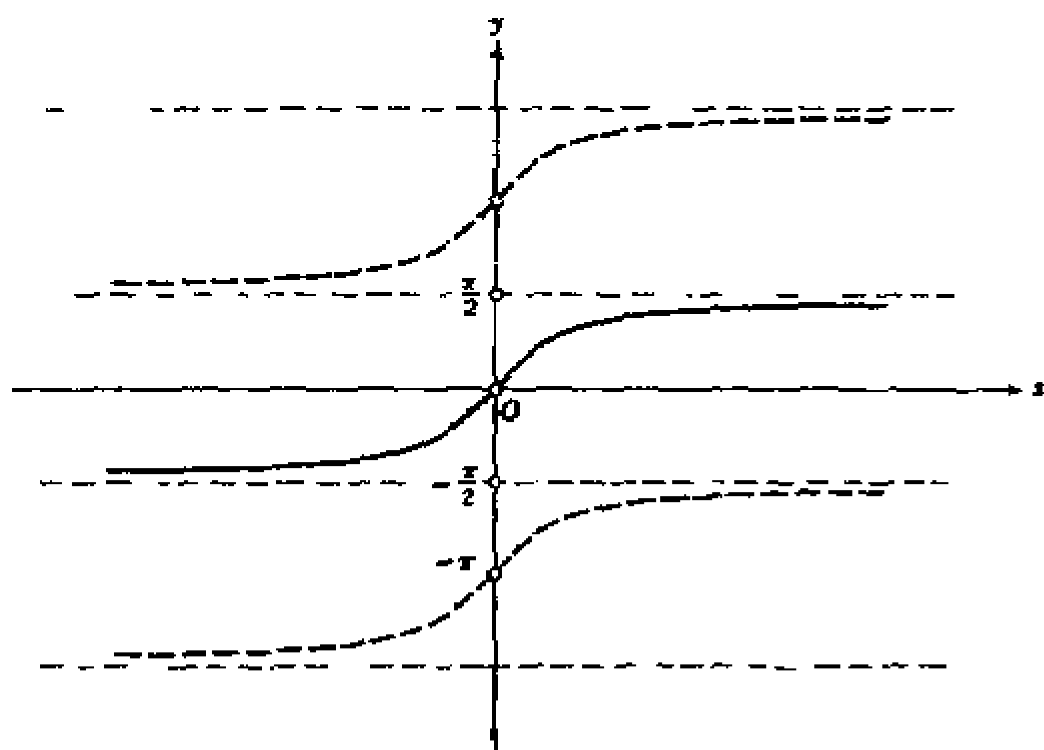


图 3.7　$y = \text{arc tan}\, x$ 的图形（实线代表主值）

其微分公式如下：

$$x = \text{arc tan}\, y,\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2};$$

$$x = \text{arc cot}\, y,\ \frac{dx}{dy} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1+\cot^2 x} = -\frac{1}{1+y^2},$$

最后，如果我们仍用 x 来表示自变量，则有

$$\frac{d}{dx}\text{arc tan}\, x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc cot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

d. 相应的积分公式

上面导出的这些公式，如果通过不定积分来表示，则可写为下列形式：

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arc sin}\, x,\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\text{arc cos}\, x,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arc tan}\, x,\qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = -\text{arc ctan}\, x.$$

虽然在每一行的两个公式中用相同的不定积分来表示不同的函数，但是它们彼此并不矛盾．事实上，这些公式正说明我们从前已经知道的结果（见 2.9 节），即同一函数的一切不定积分只是相差一些常数；这里相差的常数是 $\frac{\pi}{2}$，因为 $\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$，$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$．

如第 161 页所述，这些不定积分的公式可以直接用来求定积分．特别是，

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_a^b=\arctan b-\arctan a$$

如果我们设 $a=0, b=1$，并且注意到 $\tan 0=0$ 和 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，则得到著名的公式

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx. \tag{6}$$

数 π 本来是在研究圆时产生的，现通过这个公式被引入同有理函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 的很简单的关系中了，并且代表图 38 所示面积．

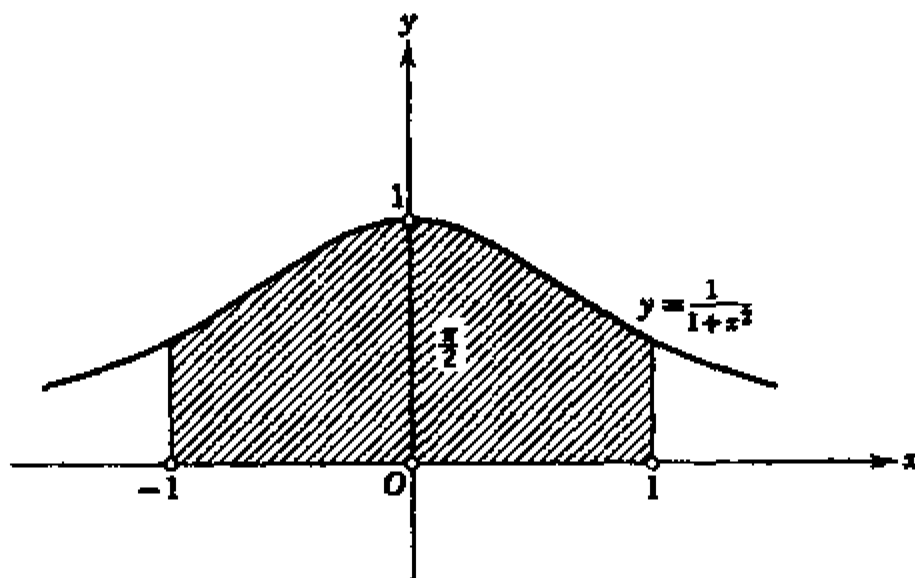


图 38　由面积表示的 $\frac{\pi}{2}$

这个关于 π 的公式乃是微积分早期的重大成就之一，以后我们还要来讨论（第一卷第二分册）．

更一般地，本节的这些公式使我们可以纯分析地定义三角函数，而完全不必涉及诸如三角形或圆这些几何对象．例如，角 y 同其正切 $x=\tan y$ 之间的关系完全可由方程

$$y=\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$$

来描述 (至少对于 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$)．现在我们可以不涉及直观而用这个关系式来定义直角三角形中角 y 的数值，角 y 的邻边为 a，对边为 b，而 $\frac{b}{a}=x$．这种通过数量的分析定义，使我们有理由在高等分析中使用角和三角函数，而不去考虑由几何结构得来的定义．

e. 指数函数的导数与积分

在第二章，我们曾作为对数函数的反函数引入了指数函数．严格地说来，这样定义的关系式 $y=e^x$ 和 $x=\log y$ 是等价的．因此，它们的导数满足关系式

$$\frac{de^x}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\log y}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x.$$

于是，**指数函数等同于其本身的导数**：

$$\frac{de^x}{dx}=e^x.$$

更一般地说，对于任一正数 a，函数 $y=a^x$ 具有反函数

$$x=\log_a y=\frac{\log y}{\log a},$$

而 a^x 的导数是

$$\frac{da^x}{dx}=\frac{1}{\frac{d\log_a y}{dy}}=(\log a)y=(\log a)a^x.$$

因此，对于任一正的常数 a，函数 $y=a^x$ 的导数与此函数本身成正比．当 a 是数 e 时，比例因子 $\log a$ 等于 1．在第 251 页上，我们

将反过来证明：任何函数，如果同其导数成正比，则其形式必定是 $y = ce^x$，其中 c 表示常数因子．我们还可以根据微积分基本定理，将 e^x 和 a^x 的导数公式变换为不定积分的公式：

$$\int e^x dx = e^x,$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x.$$

3.3 复合函数的微分法

a. 定义

上述微分法则已使我们可以求出其它一些函数的导数，例如由已知导数的函数所构成的有理表达式等．为了得到在数学分析中出现的这些函数的导数显示式，还必须进一步推导关于合成函数或复合函数的微分法则．我们经常会遇到这样一些函数，这些函数是由一些比较简单的函数合成的：$f(x) = g(\varphi(x))$，其中 $\varphi(x)$ 定义在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上，其值域为 $\alpha < \varphi(x) \leq \beta$，而 $g(\varphi)$ 则定义在后一个区间上．

在这方面，如果想到将函数解释为"算子"或映射，是有益的．正像在第一章中那样，我们将合成函数简单地写成

$$f = g\varphi,$$

并且将 $g\varphi$ 称为算子或映射 g 和 φ 的（符号）"积"．

b. 链式法则

如果函数 g 和 φ 在它们各自的定义区间上是连续的，则复合函数 $f(x) = g[\varphi(x)]$ 也是连续的（见第一章）．

现在假设函数 $\varphi(x)$ 和 $g(\varphi)$ 不仅是连续的，而且是可微的，这时，我们有下述基本定理——链式微分法则：

函数 $f(x)=g[\varphi(x)]$ **是可微的，并且其导数由下式给出**

$$f'(x)=g'(\varphi)\cdot\varphi'(x), \tag{7}$$

或者用莱布尼兹表示法，

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}.$$

因此，一个复合函数的导数是其各合成因子函数的导数之乘积．或者，函数的符号积的导数，是它们各自对于相应的自变量的导数的真正乘积．

在直观上，这个链式法则是很容易理解的．量 $\varphi'(x)=\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ 可以看作是微小区间被映射 φ 放大时的局部放大率．类似地，$g'(\varphi)$ 是映射 g 给出的放大率．在首先作用 φ，然后作用 g 的情形下，结果是首先将变量 x 的区间放大 φ' 倍，然后将所得到的变量 φ 的区间放大 g' 倍，这样产生的总的放大率 $g'\varphi'$ 必定是合成的映射 $f=g\varphi$ 的放大率．

这个定理很容易从导数的定义推出．事实上，如果我们假设在变量 x 的闭区间上 $\varphi'(x)\neq 0$，那么这个定理的证明在直观上几乎是十分明显的．这时，因为 $\Delta x=x_2-x_1\neq 0$，所以根据中值定理，我们有

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)\Delta x\neq 0 \qquad (x_1<\xi<x_2),$$

并且 $\Delta g=g(\varphi_2)-g(\varphi_1)$，$\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$，我们可以写出

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta g}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x},$$

由于 $\Delta\varphi\neq 0$，这个恒等式是有意义的．现在，当 $\Delta x\to 0$ 时（即当 $x_2\to x_1$ 时，$\Delta\varphi\to 0$，因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，各个差商分别趋向于各自的极限，于是定理得证．

为了避免明确假设 $\varphi'(x) \neq 0$, 我们可以不用 $\varphi(x)$ 来除, 而按下述稍微细致一些的方法来处理.

由 $g(\varphi)$ 在点 φ 是可微的这一假设, 我们得知, 量 $\varepsilon = \dfrac{\Delta g}{\Delta \varphi} - g'(\varphi)$, 对于固定的 φ, 作为 $\Delta\varphi$ 的函数 $(\Delta\varphi \neq 0)$, 当 $\Delta\varphi \to 0$ 时其极限为零. 如果对于 $\Delta\varphi = 0$, **定义** $\varepsilon = 0$, 我们则有

$$\Delta g = [g'(\varphi) + \varepsilon]\Delta\varphi,$$

这里对 $\Delta\varphi$ 未加限制. 类似地, 对于固定的 x, 有

$$\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = [\varphi'(x) + \eta]\Delta x,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \eta = 0$. 于是, 对于 $\Delta x \neq 0$ 和 $\varphi = \varphi(x)$, 有

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = [g'(\varphi) + \varepsilon]\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = [g'(\varphi) + \varepsilon][\varphi'(x) + \eta].$$

当 Δx 通过非零值趋向于零时, 我们有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta\varphi = 0$, 因而 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$, 于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[g'(\varphi) + \varepsilon] \lim_{\Delta x \to 0}[\varphi'(x) + \eta] = g'(\varphi)\varphi'(x),$$

链式法则得证.

连续应用链式法则, 我们便可将公式直接推广到由**两个以上的函数复合而成**的情形. 例如, 如果

$$y = g(u), u = \varphi(v), v = \psi(x),$$

这时 $y = f(x) = g[\varphi(\psi(x))]$ 是 x 的复合函数; 其导数可按下列法则得到:

$$\frac{dy}{dx} = y' = g'(u)\varphi'(v)\psi'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

对于由任意多个函数合成的函数, 类似的关系式也成立.

复合函数的高阶导数 重复应用链式法则以及前面的微分法则，不难求得 $y=g[\varphi(x)]$ 的高阶导数:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = g'\varphi',\\
y'' &= g''\varphi'^2 + g'\varphi'',\\
y''' &= g'''\varphi'^3 + 3g''\varphi'\varphi'' + g'\varphi'''
\end{aligned}
$$

我们可以继续推出对于 y''' 等等类似的公式.

最后，让我们来考察一下**两个互逆的函数的复合**. 函数 $g(y)$ 是函数 $y=\varphi(x)$ 的反函数，如果 $f(x)=g[\varphi(x)]=x$. 由此可知,

$$f'(x)=g'(y)\varphi'(x)=1,$$

这与 3.2 节 (第 233 页) 的结果完全相同.

例 作为应用链式法则的一个简单而重要的例子，我们来微分 $x^\alpha(x>0)$, 其中 α 是任意实数. 在第二章，我们曾定义

$$x^\alpha = e^{\alpha\log x};$$

对于 $\varphi(x)=\log x, \psi(u)=\alpha u, g(y)=e^y$, 我们也曾证明

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}, \psi'(u)=\alpha, g'(y)=e^y.$$

现在，x^α 是复合函数 $g\{\psi[\varphi(x)]\}$. 应用链式法则，得到一般公式

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^\alpha) &= g'(y)\psi'(u)\varphi'(x)\\
&= e^y\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \frac{\alpha e^{\alpha\log x}}{x} = \alpha\frac{x^\alpha}{x},
\end{aligned}
$$

因此

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}.$$

当 α 为无理数时，如果我们将 x^α 定义为具有有理指数的幂函数的极限，而试图直接从这个定义出发，那么我们也能证明上述公式,

只是要困难一些. 而积分公式

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\alpha \neq -1)$$

乃是这个微分公式的直接推论.

作为第二个例子, 我们考虑

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{或} y = \sqrt{\varphi},$$

其中 $\varphi = 1 - x^2$, 而 $-1 < x < 1$. 由链式法则得到

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

通过下列简短的计算, 还可给出另外一些例子.

1. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}\quad (-1 \leq x \leq 1, x \neq 0)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} \\ &= \frac{1}{|x|}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\text{sgn}(x).\end{aligned}$$

2. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\quad (-1 < x < 1).$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{dx} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}.\end{aligned}$$

3. $y = \log|x|$. 当 $x > 0$ 时, 这个函数[1] 可以直接写为 $\log x$, 当 $x < 0$ 时可以表示为 $\log(-x)$. 当 $x > 0$ 时,

$$\frac{d\log|x|}{dx} = \frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

1) 函数 $\log x$ 只是当 $x > 0$ 时才有定义, 而 $\log|x|$ 除 $x = 0$ 以外处处有定义.

当 $x<0$ 时，由链式法则我们得到

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{d\log(-x)}{dx}=\frac{1}{-x}\frac{d(-x)}{dx}=\frac{1}{x}.$$

因此，一般说来，当 $x\neq 0$ 时

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}.$$

4. $y=a^x$. 由 a^x 的定义，我们有

$$a^x=e^{\varphi(x)},$$

其中 $\varphi(x)=(\log a)x$. 于是

$$\frac{da^x}{dx}=\frac{de^\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}=e^\varphi(\log a)=(\log a)a^x.$$

在第 243 页上，我们由求反函数的导数的法则已经得到同样的结果.

5. $y=[f(x)]^{g(x)}$. 因为

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{\varphi(x)},$$

其中 $\varphi(x)=g(x)\log[f(x)]$, 我们得到

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)}=e^\varphi\left(g'\log f+g\frac{1}{f}f'\right)$$
$$=[f(x)]^{g(x)}\left(g'(x)\log[f(x)]+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

例如，当 $g(x)=f(x)=x$ 时，我们有

$$\frac{dx^x}{dx}=x^x(\log x+1).$$

c. 广义微分中值定理

作为链式法则的一个应用，我们来推导**广义微分中值定理**. 考虑两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$, 它们在 x 轴的闭区间 $[a,b]$ 上是连续的,

并在这个区间的内部是可微的．我们假设 $G'(x)$ 是正的．将通常的微分学中值定理分别应用于 F 和 G，给出差商

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$$

的表达式：

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)(b-a)}{G'(\eta)(b-a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\eta)},$$

其中 ξ 和 η 是开区间 (a,b) 内的两个适当的中间值．广义中值定理说的是：我们可以将这个差商写成更简单的形式

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\zeta)}{G'(\zeta)},$$

其中 F' 和 G' 是在同一个中间值 ζ 上取值的．

为了证明这个定理，我们引入 $u=G(x)$ 作为 F 中的自变量．由假设 $G'>0$，我们得知：函数 $u=G(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调的，因而就有定义在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的反函数 $x=g(u)$，其中 $\alpha=G(a),\beta=G(b)$．因此，复合函数 $F[g(u)]=f(u)$ 对于区间 $[\alpha,\beta]$ 上的 u 有定义．由通常的中值定理，我们得到

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)\\&=f'(\gamma)[G(b)-G(a)],\end{aligned}$$

其中 γ 是 α 和 β 之间的一个适当的值．又由链式法则，我们推出

$$f'(u)=\frac{d}{du}F[g(u)]=F'[g(u)]g'(u)=\frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

而在区间 (a,b) 内，对于 $u=\gamma$，存在对应的一个值 $x=g(\gamma)=\zeta$ 于是 $f'(\gamma)=\dfrac{F'(\zeta)}{G'(\zeta)}$，从而得到广义中值定理．

3.4 指数函数的某些应用

涉及指数函数的问题种类繁多，这就说明指数函数在各方面的应用当中都是十分重要的．

a. 用微分方程定义指数函数

我们能够通过一种简单的性质来定义指数函数，在一些特殊的情况下，应用这种性质可以避免许多详细的论证.

如果函数 $y = f(x)$ **满足形式为**

$$y' = \alpha y \tag{8}$$

的方程，其中 α **是常数，则** y **具有形式**

$$y = f(x) = ce^{\alpha x},$$

其中 c **也是常数，相反，每一个形式为** $ce^{\alpha x}$ **的函数都满足方程** $y' = \alpha y$

因为方程 (8) 表示函数及其导数之间的一种关系，所以称为指数函数的**微分方程**.

显然，当 c 是任意常数时，$y = ce^{\alpha x}$ 满足这个方程. 反之，任何其他函数都不满足微分方程 $y' - \alpha y = 0$. 因为如果 y 是满足这个方程的一个函数，我们考虑函数 $u = ye^{-\alpha x}$ 这时，我们有

$$u' = y'e^{-\alpha x} - \alpha ye^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(y' - \alpha y).$$

然而，由于我们已经假设 $y' = \alpha y$，所以右端等于零；因此 $u' = 0$，于是 u 是常数 (第 197 页)，正如我们要证明的，$y = ce^{\alpha x}$.

现在我们将这个定理应用于几个实例.

b. 连续复利、放射性蜕变

由于定期利息而扩大的资本总和 (或称本金) 在利息期间是以下述突变的形式而增加的. 如果 100α 是百分利率，并且自然增长的利息在每年末加入本金，则 x 年以后，开始时为 1 的本金的积累值将是

$$(1 + \alpha)^x.$$

然而，如果利息不是在每年之末而是在一年的每 n 分之一之末加入到本金里面，那么 x 年以后资本总和将达到

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nx}.$$

为简单起见，取 $x=1$，我们得知开始时为 1 的资本在一年以后将增长到

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}.$$

现在，如果我们令 n 无限增大，也就是说，在越来越短的期间内将利息计入本金，则其极限情况意味着随时将复利计入本金；于是，一年之后的资本总和将是原有本金的 e^{α} 倍（见第 171 页）。类似地，如果继续按这种方式来计算利息，那么原来为 1 的本金在 x 年之后将增加到 $e^{\alpha x}$；这里 x 可以是任何整数或非整数。

许多这种类型的例子都不难归入 3.4 节 a 论题的范围中去。例如，我们考虑由数 y 表示的一个量，这个量随时间而增加（或减少），而增加（或减少）的速率与其总量成正比。如果以时间为自变量，那么增长率就是形式为 $y'=\alpha y$ 的一个规律，其中比例因子 α 是正的还是负的，取决于这个量是增加还是减少。于是，根据 3.4 节 a，量 y 本身可由公式

$$y=ce^{\alpha x}$$

给出。如果我们考虑时刻 $x=0$，即可明了常数 c 的意义：当 $x=0$ 时，$e^{\alpha x}=1$，我们得知 $c=y_0$ 是在时间开始时的数量，于是可以写成

$$y=y_0e^{\alpha x}.$$

一个具有代表性的例子就是**放射性蜕变**。在任一时刻，放射性物质的总量 y 减少的速率都同这一时刻存在的物质总量成正比；这一点是可以理解到的，因为每一部分物质减少的速度同其他每一部分物质是一样的。所以，用时间的函数来表示物质总量 y，应满足形式为 $y'=-ky$ 的关系式，其中 k 应取正值，因为我们指的是减

少着的量．于是，物质总量可以表示为时间的函数：$y = y_0 e^{-kx}$，其中 y_0 是在时间开始时（时间 $x = 0$）物质的总量．

在一定的时间 τ 以后，放射性物质将减少到其初始总量的一半．这个所谓的**半衰期** τ 由下列方程给出：

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{-k\tau},$$

由此方程我们立即得到 $\tau = \frac{1}{k} \log 2$.

c．物体被周围介质冷却或加热

出现指数函数的另一个典型例子是物体冷却，例如浸入很大的低温水槽中的温度均匀的金属板的冷却问题．假设水槽本身很大，以致其温度不受冷却过程的影响．我们还假设，在每一时刻，浸入水槽之物体的各部分都具有同样的温度，并且温度变化的速率同物体的温度与周围介质的温度之差成正比（牛顿冷却定律）．

如果我们用 x 表示时间，用 $y = y(x)$ 表示物体与水槽之间的温度差，那么这个冷却定律就可以表示为下列方程：

$$y' = -ky,$$

其中 k 是正的常数（k 值表征物体物质的物理特性）．从这个表示给定时刻冷却过程的效应的微分方程，我们利用第 251 页式 (8)，就得到形式为

$$y = ce^{-kx}$$

的"积分律"，它给出任意时刻 x 的温度差．此式说明，温度"按指数方式"下降，并且逐渐变得等于外界的温度．温度下降快慢的程度由数 k 来决定．常数 c 的意义同前面一样，在这里是 $x = 0$ 时的初始温度差，$y_0 = c$，于是这个冷却定律可以写为下列形式．

$$y = y_0 e^{-kx}$$

显然，上述讨论也适用于物体加热的场合，不同的只是这时初始温度差 y_0 是负的而不是正的.

d. 大气压随地面上的高度的变化

出现指数函数的又一个例子是大气压随高度的变化，我们利用两个物理事实：(1) 大气压等于地面单位面积垂直上方空气柱的重量；(2) 波义耳定律，按照这个定律，在给定的常温下，空气的压力 p 同空气的密度 σ 成正比. 用符号来表示，波义耳定律是 $p = a\sigma$，其中 a 是一个常数，它取决于空气的特定的物理性质. 我们的问题是要确定作为离地面的高度 h 的函数 $p = f(h)$.

如果我们用 p_0 表示地面的大气压，即单位面积上承受的空气柱的总重量，用 g 表示引力常数，用 $\sigma(\lambda)$ 表示离地面高度为 λ 之处的空气密度，那么直到高度为 h 的空气柱的重量则由积分 $g\int_0^h \sigma(\lambda)d\lambda$ 给出[1]. 因此，高度 h 处的大气压是

$$p = f(h) = p_0 - g\int_0^h \sigma(\lambda)d\lambda.$$

进行微分，则得到压力 $p = f(h)$ 和密度 $\sigma(h)$ 之间的下列关系式：

$$g\sigma(h) = -f'(h) = -p'$$

现在我们利用波义耳定律从这个方程中消去量 σ，于是得到方程 $p' = -(\frac{g}{a})p$，其中只含一个压力未知函数. 由第 251 页式 (8) 得到

$$p = f(h) = ce^{-\frac{gh}{a}}$$

如果像上面那样，我们用 p_0 表示地面的大气压 $f(0)$，则立即可知 $c = p_0$，结果

$$p = f(h) = p_0e^{-\frac{gh}{a}}.$$

---

1) $g\sigma(\lambda)$ 是高度 λ 处每单位体积空气的重量.

取对数以后，得到

$$h = \frac{a}{g}\log\frac{p_0}{p}.$$

我们经常会用到这两个公式. 例如，如果常数 a 已知，根据这两个公式，我们便可由气压计测得的大气压来求某一处的高度，或者通过测量某两处的大气压来求这两处的高度差. 此外，如果大气压和高度 h 均已知，我们则可确定在气体理论中具有重大意义的常数 a.

e. 化学反应过程

现在我们来考虑一个取自化学的例子，即所谓**单分子反应**. 我们假设物质溶解于大量的溶剂之中，譬如说一定数量的蔗糖溶解于水中. 如果发生化学反应，那么在这种情况下化学中质量作用定律表明：反应的速率同正在进行反应的物质的数量成正比. 我们假设，蔗糖由于催化作用逐渐变为转化糖，并且用 $u(x)$ 表示在时刻 x 时尚未变化的蔗糖的数量. 于是，反应的速率是 $-\dfrac{du}{dx}$，根据质量作用定律，下列形式的方程成立：

$$\frac{du}{dx} = -ku,$$

其中 k 是与进行反应的物质有关的常数. 像第 251 页那样，从这个瞬时的微分律，我们立即得到积分律

$$u(x) = ae^{-kx},$$

这个定律作为一个时间的函数给出了蔗糖的数量. 它清楚地说明，化学反应如何逐渐地趋向于其最终状态 $u=0$，即进行反应的物质完全转化. 常数 a 显然是 $x = 0$ 时存在的蔗糖数量.

f. 电路的接通或断开

作为最后一个例子，我们来考察当接通或切断电路时直流电流的产生或消失过程. 如果 R 是电路的电阻，E 是电动势 (电压)，电

流 I 由其最初的零值逐渐增加到最终的稳定值 $\frac{E}{R}$. 因此, 我们必须将 I 看作为时间 x 的函数. 电流的产生与电路的自感有关: 电路具有一个特征常数 L——自感系数, 其性质是: 当电流增加时, 将产生一个与外加电动势 E 相反的、大小为 $L\frac{dI}{dx}$ 的电动势. 由欧姆定律可知: 在每一时刻, 电阻与电流的乘积都等于实际有效电压, 于是我们得到关系式

$$IR = E - L\frac{dI}{dx}.$$

令

$$f(x) = I(x) - \frac{E}{R},$$

我们立即求出 $f'(x) = -(\frac{R}{L})f(x)$, 因此由第 251 页式 (8) 有 $f(x) = f(0)e^{-\frac{Rx}{L}}$. 注意到 $I(0) = 0$, 我们得知 $f(0) = -\frac{E}{R}$. 于是, 作为一个时间的函数, 我们得到电流的表达式

$$I = f(x) + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rx}{L}}).$$

这个表达式说明当电路接通时电流是如何渐近地趋向于其稳定值 $\frac{E}{R}$ 的.

3.5 双曲函数

a. 分析的定义

在许多应用中, 指数函数还以下列组合的形式出现:

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ 或 } \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

作为一些特定的函数, 引入这些组合以及类似的一些组合确是很方

便的；我们把它们表示如下：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{9a}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{9b}$$

并分别称为**双曲正弦**、**双曲余弦**、**双曲正切和双曲余切**. 函数 $\sinh x$, $\cosh x$ 和 $\tanh x$ 对于一切 x 值都有定义，而对于 $\coth x$ 来说，点 $x = 0$ 必须除外. 选用这样一些名称，是为了表明它们同三角函数有着某种类似；正是这种我们将要详细研究的相似性，证明我们特别来考察一下这些新函数的合理性. 图 3.9、3.10 和 3.11 给出了

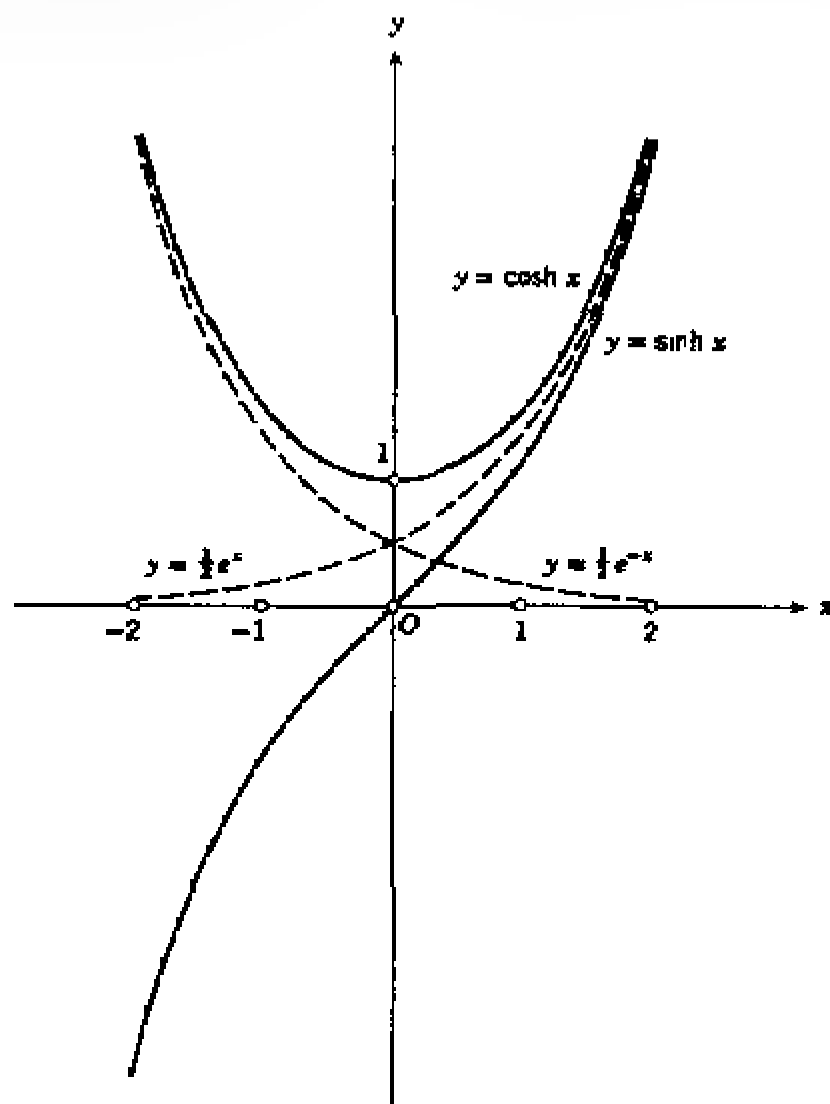


图 3.9

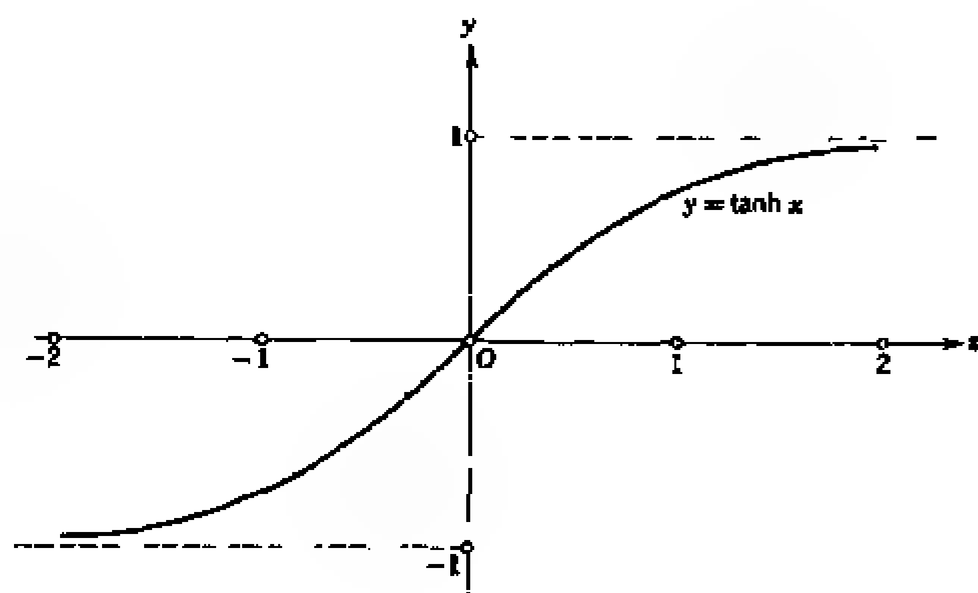


图 3.10

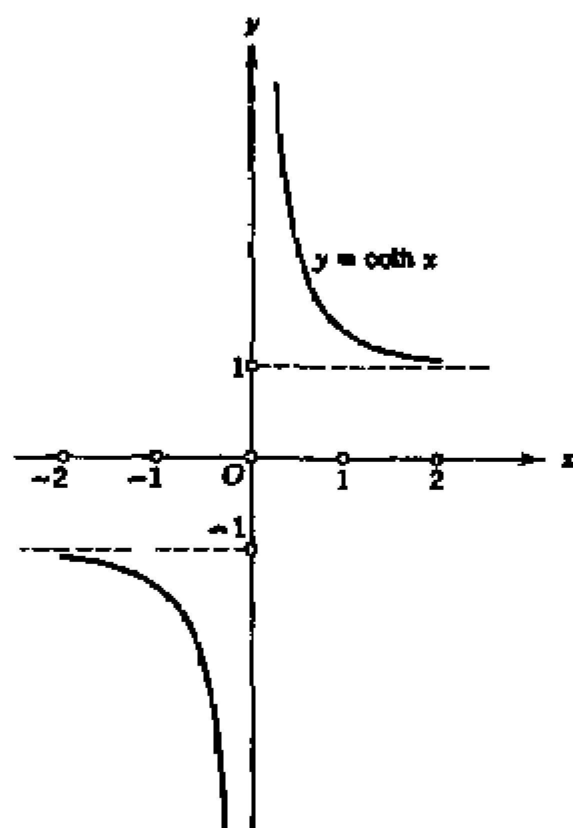


图 3.11

双曲函数的图形; 图 3.9 中的虚线是 $y=\left(\frac{1}{2}\right)e^{x}$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)e^{-x}$ 的图形, 由这些图形很容易作出 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 的图形.

显然, $\cosh x$ 是**偶函数**, 即当把 x 换为 $-x$ 时该函数保持不变, 而 $\sinh x$ 是**奇函数**, 即当把 x 换为 $-x$ 时该函数变号 (见第 32

页)

根据定义，函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

对于一切 x 值都是正的并且不小于 1．当 $x = 0$ 时，这个函数取最小值：$\cosh 0 = 1$.

由定义可以直接推出 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 之间的基本关系式

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

现在，如果我们不用 x 而用 t 来表示自变量，并且记

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t,$$

则有

$$x^2 - y^2 = 1.$$

也就是说，当 t 取遍由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的一切值时，坐标为 $x = \cosh t, y = \sinh t$ 的点将沿着等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 移动．按照所定义的方程，$x \geq 1$，并且由上述公式显然可知，当 t 取遍由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的一切值时，y 将遍及由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的一切值；因为，当 t 趋向于无穷大时 e^t 趋向于无穷大，而 e^{-t} 则趋向于零．所以，我们可以更确切地说：当 t 取遍由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的一切值时，方程 $x = \cosh t, y = \sinh t$ 给出等轴双曲线的一支，即右边的一支．

b. 加法定理和微分公式

由双曲函数的定义，我们得到双曲函数的**加法定理**：

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b, \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \end{aligned} \tag{10}$$

如果我们写出

$$\cosh(a+b)=\frac{e^a e^b+e^{-a}e^{-b}}{2},$$
$$\sinh(a+b)=\frac{e^a e^b-e^{-a}e^{-b}}{2},$$

并将

$$e^a=\cosh a+\sinh a,\quad e^{-a}=\cosh a-\sinh a,$$
$$e^b=\cosh b+\sinh b,\quad e^{-b}=\cosh b-\sinh b$$

代入，加法定理即可得证. 这些公式同相应的三角公式之间是极其相似的. 加法定理中的唯一差别在于第一个公式中有一个符号是不同的.

微分公式也存在相应的类似之处. 如果想到 $\frac{de^x}{dx}=e^x$，我们不难得到

$$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\quad \frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x=\frac{1}{\cosh^2 x},\quad \frac{d}{dx}\coth x=-\frac{1}{\sinh^2 x}. \tag{11}$$

由前两个公式可知：$y=\cosh x$ 和 $y=\sinh x$ 是下列**微分方程**的解：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y, \tag{12}$$

这个方程与三角函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 所满足的类似方程也仅仅相差一个符号 (见第 191 页).

c. 反双曲函数

对应于双曲函数 $x=\cosh t, y=\sinh t$ 的反函数，我们记为 [1]

$$t=\operatorname{ar}\cosh x,\qquad t=\operatorname{ar}\sinh y.$$

1) 也使用符号 $\cosh^{-1}x$，等等，见第 59 页脚注.

因为函数 $\sinh x$ 在整个区间 $-\infty < x < \infty$ 上是单调增加的[1]，所以对于一切 y 值其反函数唯一确定；另一方面，只要看一下函数图形（见第 257 页图 3.9）便可得知，$t = \operatorname{ar}\cosh x$ 不是唯一确定的，而是具有两种符号，因为对应于一个给定的 x 值，不仅有一个数 t 而且还有一个数 $-t$. 因为对于一切 t 值，有 $\cosh t \geq 1$，所以其反函数 $\operatorname{ar}\cosh x$ 只是对于 $x \geq 1$ 才有定义.

我们不难用对数来表示这些反函数，只须将定义

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

中的 $e^t = u$ 看作为未知量，并且由这些（二次）方程解出 u 来.

$$u = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad u = y + \sqrt{y^2 + 1};$$

因为 $u = e^t$ 只能具有正值，所以第二个方程中的平方根必须取正号，而第一个方程中的平方根既可取正号也可取负号（正相应于上面指出的那两种情况）. 如果写成对数形式，则有 $t = \log u$，因此

$$\begin{aligned} t &= \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{ar}\cosh x \\ t &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \operatorname{ar}\sinh y. \end{aligned} \tag{13}$$

在 $\operatorname{ar}\cosh x$ 的情况中，变量 x 只限于取区间 $x \geq 1$ 上的值，而 $\operatorname{ar}\sinh y$ 对于一切 y 值都有定义.

方程 (13) 给出 $\operatorname{ar}\cosh x$ 的两个值

$$\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ 和 } \log(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

它们对应于 $\operatorname{ar}\cosh x$ 的两个分支. 因为

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1,$$

所以 $\operatorname{ar}\cosh x$ 的这两个值之和为零，这同前面指出的 t 具有两种符号是一致的.

---

1) $\frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t > 0.$

我们能够类似地定义双曲正切和双曲余切的反函数，并且也能用对数来表示. 我们将这些反函数记为 ar tanh x 和 ar coth x; 如果都用 x 来表示自变量，我们不难得到

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ar\,tanh} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad \text{在区间} \quad -1<x<1\text{内},\\
\operatorname{ar\,coth} x &= \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \quad \text{在区间} x<-1, x>1\text{内}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

读者自己可以对这些反函数进行微分；既可以应用反函数的微分法则，也可以取这些反函数的对数表达式而应用链式法则. 如果把 x 作自变量，则结果是

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\operatorname{ar\,cosh} x = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{ar\,sinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\\
&\frac{d}{dx}\operatorname{ar\,tanh} x = \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{ar\,coth} x = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

后两个公式彼此并不矛盾，因为前者只是对 $-1<x<1$ 成立，后者只是对 $x<-1$ 和 $1<x$ 成立. 在第一个公式中导数 $\frac{d}{dx}\operatorname{ar\,cosh} x$ 的两个值 (分别取正号和负号), 对应于曲线 $y=\operatorname{ar\,cosh} x=\log(x\pm\sqrt{x^2-1})$ 的两个不同的分支.

d. 与三角函数的其他相似性

双曲函数同三角函数之间的相似性并不是偶然的. 如果我们像在后面 7.7 节 a 中所做的那样, 用虚变量来考察这些函数, 那么二者相似性的更深刻原因就会变得十分明显. 这时，我们可以把 $\cosh x$ 和 $\cos(ix)$, $\sinh x$ 和 $\left(\frac{1}{i}\right)\sin(ix)$ 等同起来，其中 $i=\sqrt{-1}$. 这一事实显然使得每一个含三角函数的关系式都对应着相似的双曲函数关系式. 这许多相似性都存在着很有意义的几何解释或物理解释 (也可参阅第四章，4.1 节 j).

在上面用量 t 来表示等轴双曲线时，我们并没有对"参数"t 本身赋予任何几何意义. 现在我们再来讨论这个论题，则会发现三角函数同双曲函数的另一些相似之处. 如果我们通过参数 t 以 x

$\cos t, y = \sin t$ 的形式来表示方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆，则可将量 t 解释为一个角或者解释为沿圆周度量的弧长；然而，我们也可将 t 看作为对应于该角的圆扇形面积的二倍，面积为正还是为负，取决于该角是正的还是负的.

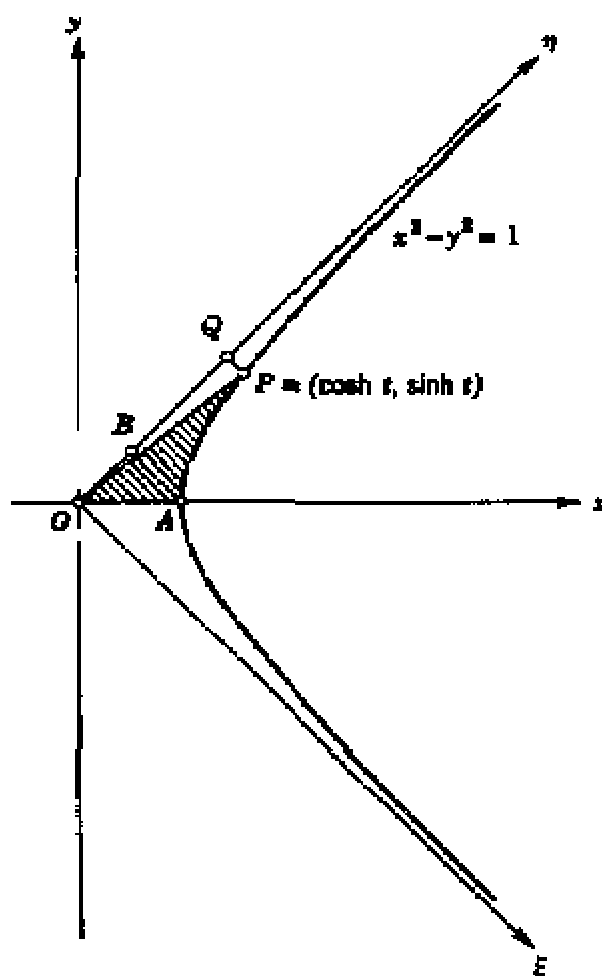


图 3.12

现在我们可以类似地说，对于双曲函数，量 t 是关于 $x^2-y^2=1$ 的双曲扇形 (图 3.12 中斜线所示部分) 的面积的二倍[1]. 把 t 解释为面积，这正是将反双曲函数称为 $t = \operatorname{ar\,cosh} x$ 和 $t = \operatorname{ar\,sinh} y$ 的原因[2]. 其证明并不难得到，只要我们通过坐标变换

$$x - y = \sqrt{2}\xi, \quad x + y = \sqrt{2}\eta,$$

1) 关于另一种证明，见第四章 4.1 节 k.

2) 正像 $t = \arccos x$ 指的是单位圆的**弧长**那样，$t = \operatorname{ar\,cosh} x$ 指的是与等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 有关的**面积**. 顺便指出，t **不是**双曲线的弧长.

或

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi),$$

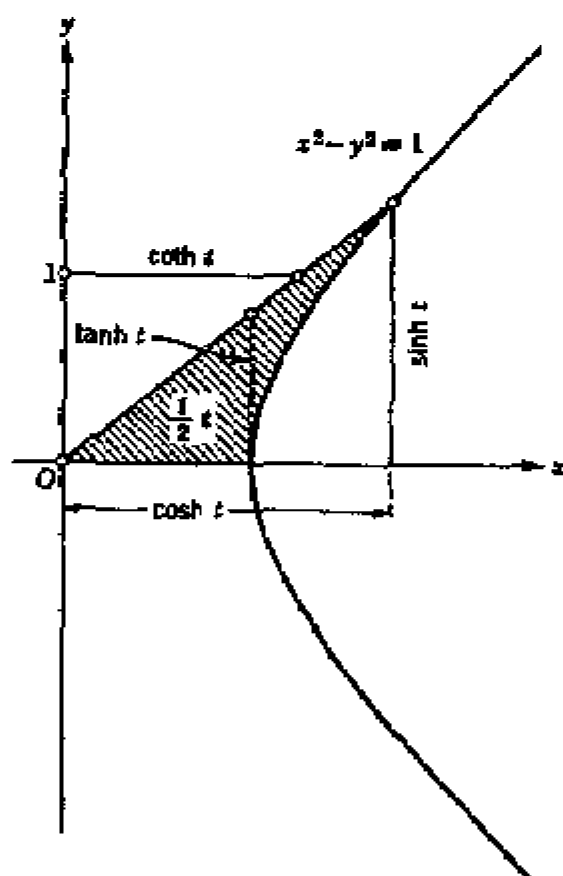


图 3.13

使得双曲线的渐近线成为坐标轴；在这些新的坐标之下，双曲线的方程是 $\xi\eta = \frac{1}{2}$. 因为 OQ 和 QP 的长度分别是 η 和 $\frac{1}{2\eta}$，两个直角三角形 OPQ 和 OAB 的面积都是 $\frac{1}{4}$，所以双曲扇形的面积等于图形 $ABQP$ 的面积. 显然，点 A 和点 B 的坐标分别是

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{和} \quad \xi = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

于是我们得到双曲扇形面积的二倍是

$$2\int_{1/\sqrt{2}}^{(x+y)/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\eta}\right) d\eta = \log(x+y) = \log(x + \sqrt{x^2-1}),$$

然而根据第 261 页方程 (13)，上式右端等于 t，因而我们的论断得证.

总之，我们可以指出，如图 3.13 所示，双曲函数在图形上可以通过双曲线来表示，正像三角函数可以通过圆来表示一样.

3.6 最大值和最小值问题

在多种应用中，我们首先来阐述函数的最大值和最小值的理论，并联系二阶导数进行几何上的讨论.

a. 曲线的下凸和上凸

根据定义，导数 $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ 表示曲线 $y = f(x)$ 的斜率，函数 $f'(x)$（即曲线 $y = f(x)$ 的斜率）的导数，是由导数 $\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ 即 $f(x)$ 的**二阶导数**给出的，如此等等. 如果二阶导数 $f''(x)$ 在点 x 是正的，那么由连续性（我们假设），$f''(x)$ 就在点 x 的某一个邻域内是正的[1]，于是在这个邻域内导数 $f'(x)$ 随 x 值增加而增加. 因此，曲线 $y = f(x)$ 是向下凸的；这时，函数 $f(x)$ 或曲线 $y = f(x)$ 称为严格**下凸的**. 如果 $f''(x)$ 是负的，则函数和曲线称为**上凸的**.

所以，当 $f''(x) > 0$ 时，在点 x 的邻域内，曲线处于其切线的上方，而当 $f''(x) < 0$ 时，曲线则处于切线的下方（见图 3.14a 和 3.14b）（参阅第 225 页问题 4 和 5.6 节）.

拐点

我们还需要特别加以考虑的只是在 $f''(x) = 0$ 的一些点，一般说来，当 x 通过这种点时，二阶导数将改变其符号. 因此，这种点是上述两种情况之间的转折点；也就是说，在这种点的一边切线处

---

1) 这里我们利用了在直观上是明显的结果：如果**连续**函数 $g(x)$，在点 x_0 是正的，则在 x_0 的充分小的邻域内的一切点（只要它们属于 g 的定义域）也是正的. 正式证明很简单. 由 g 在 x_0 的连续性，我们得知：对于**每一个**正的 ε，在点 x_0 的充分小的邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x 上，不等式 $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ 都成立. 因为 $g(x_0) > 0$，我们可以将数值 $\frac{1}{2}g(x_0)$ 取作为 ε，于是在某个邻域内，$|g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{2}g(x_0)$. 这时，因为 $g(x_0) - g(x) \leq |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{2}g(x_0)$，所以可以推出 $g(x) > \frac{1}{2}g(x_0) > 0$.

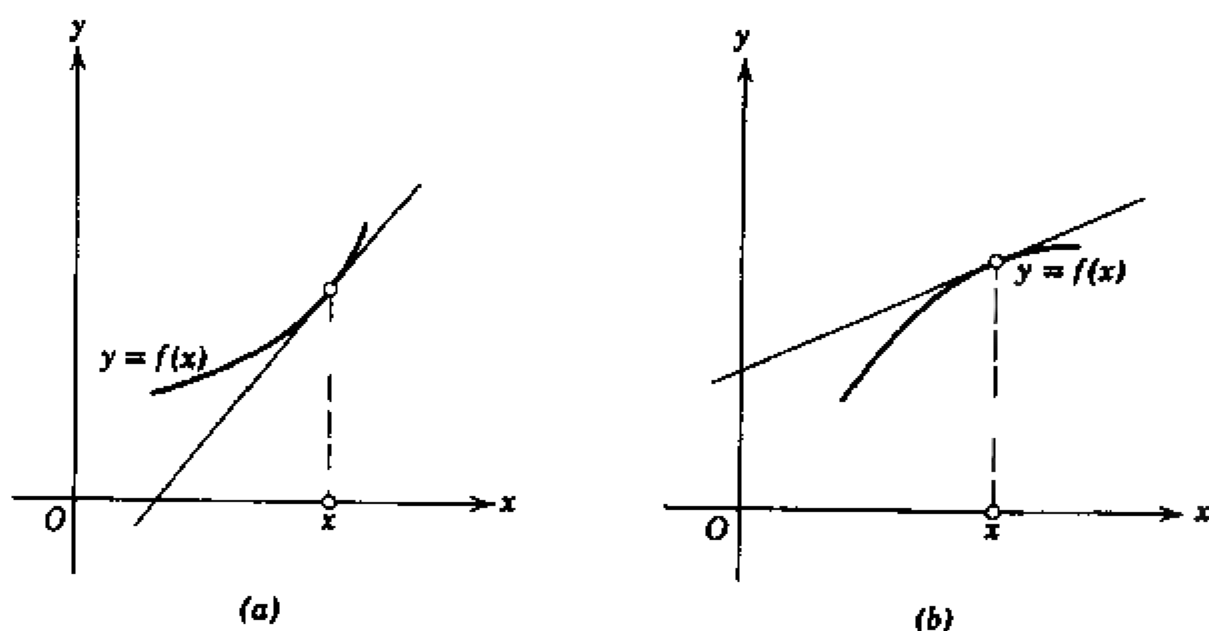


图 3.14 (a)$f''(x) > 0$; (b)$f''(x) < 0$

于曲线的上方, 在另一边切线处于曲线的下方, 而切线在该点上穿过曲线 (见图 3.15). 这种点称为曲线的**拐点**, 其对应的切线称为**拐切线**.

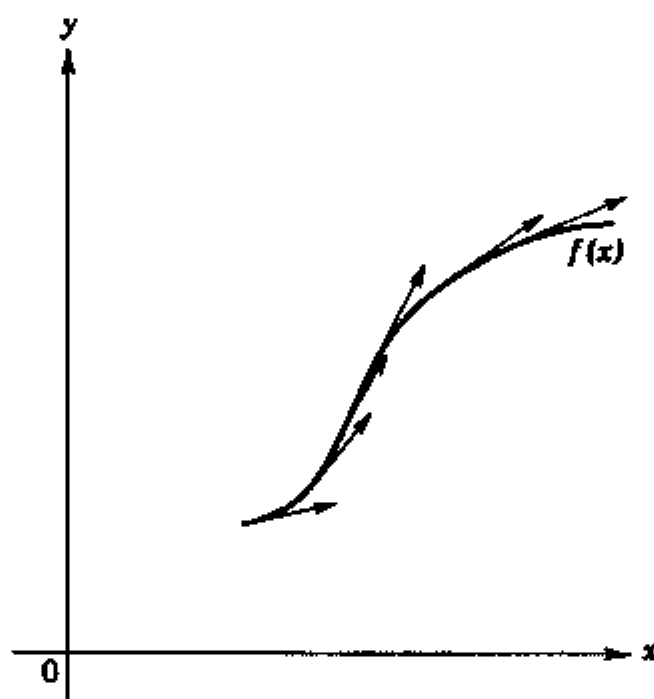


图 3.15 拐点

一个最简单的例子是函数 $y = x^3$ ——立方抛物线. 对此, x 轴本身就是在拐点 $x = 0$ 处的拐切线 (见第 236 页, 图 3.3). 另一

个例子是函数 $f(x)=\sin x$. 对于这个函数,

$$f'(x)=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\qquad f''(x)=\frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x.$$

由此, $f'(0)=1$ 和 $f''(0)=0$. 因为在 $x=0$ 处左右 $f''(x)$ 变号, 所以正弦曲线在坐标原点具有与 x 轴构成 45° 倾角的拐切线.

然而, 必须指出的是, 还存在这样一些点, 在这些点上 $f''(x)=0$, 但是当 x 过该点而增加时 $f''(x)$ 不变号, 其切线并不穿过曲线而是位于曲线的一侧. 例如曲线 $y=x^4$ 的整个图形位于 x 轴的上方, 虽然在 $x=0$ 处二阶导数 $f''(x)=12x^2$ 等于零.

b. 最大值和最小值——极值问题. 平稳点

我们说函数 $f(x)$ 在点 ξ 达到**最大值**, 如果在点 ξ 处的 f 值不小于在 f 的定义域中任何其他点 x 上的 f 值, 也就是说, 对于使得 f 有定义的一切 x, 有 $f(\xi)\geq f(x)$[1]. 类似地, 我们说 $f(x)$ 在点 ξ 达到**最小值**, 如果对于其定义域中的一切 x 有 $f(\xi)\leq f(x)$.

例如, 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $-1\leq x\leq 1$ 上有定义, 在 $x=\pm 1$ 处达到最小值, 而在 $x=0$ 处达到最大值. 不难给出一些没有最大值或者没有最小值的连续函数的例子, 例如, 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (第 242 页图 3.8) 在定义域 $-\infty<x<+\infty$ 内没有最小值; 对于 $0<x<+\infty$ 定义的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 根本不存在最大及最小值点, 然而, 我们回想到第一章第 110 页的外尔斯特拉斯定理, 根据这个定理, 定义在有限闭区间上的连续函数在这个区间上总是具有最大值 (同样地具有最小值).

我们的目的是要寻找一种求函数或曲线的最大、最小值点的方法. 在几何学、力学、物理学以及其他领域中经常会遇到的这一问题, 曾是在 17 世纪促使微积分发展的重要原因之一.

---

1) 如果对于 f 的定义域中不同于 ξ 的一切 x, 有 $f(\xi)>f(x)$, 我们就说 $f(x)$ 在点 ξ 具有**严格的最大值**, 点 ξ 称为严格最大点.

微积分并未提供确定函数 $f(x)$ 的最大值、最小值的直接方法，但是它使我们可以求出所谓**相对最大值**、**最小值点**，实际的最大值和最小值必定在这些点上出现. 我们说点 ξ 是 $f(x)$ 的**相对**最大值（最小值）点，如果 $f(x)$ 在点 ξ 上达到最大（最小）值，这里并不是同一切可能的 $f(x)$ 之值相比，而是同对于 ξ 的某一**邻域**内的 x 而言的 $f(x)$ 之值相比，这里所谓点 ξ 的邻域，我们指的是包含点 ξ 的、可以为任意小的任何开区间 $\alpha < x < \beta$. 因此，f 的相对最大值最小值点 ξ 就是当 f 被限制在其定义域中一切充分接近于 ξ 的点上时的最大值、最小值点[1]. 显然，函数的最大值、最小值包含在其相对最大值、最小值之中（见图 3.16）（今后，为与习惯一致，称相对最大值、相对最小值为极大值和极小值，统称为极值. ——译者注）

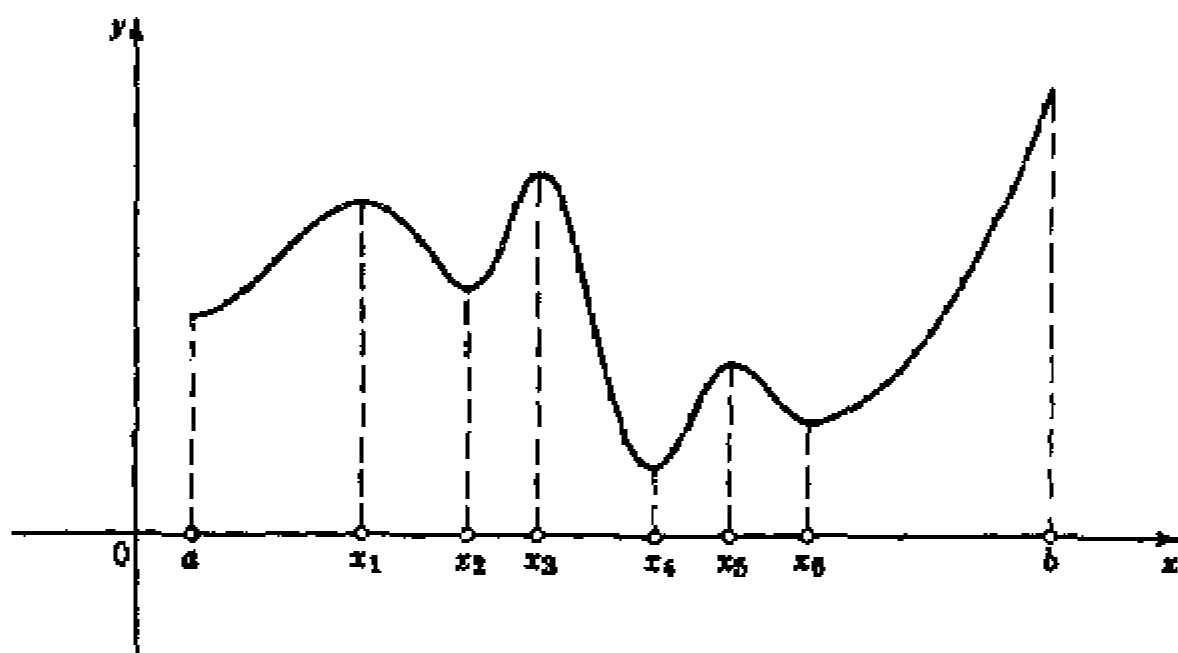


图 3.16　定义在区间 $[a,b]$ 上的函数的图形. 这个函数在 $x=a$, x_2, x_4, x_6 上具有相对最小值（即极小值），在 x_1, x_3, x_5, b 上具有相对最大值（即极大值），在 b 上具有最大值，在 x_4 上具有最小值

从几何上来说，极大值和极小值如果不是位于定义区间的端点上，则分别是曲线的波峰和波谷. 注意图 3.16 便可得知，在点 x_5

1. 相对最大值点 ξ 的正式定义应当这样来叙述：存在一个包含 ξ 的开区间，对于这个区间中使得 f 有定义的一切 x 来说，$f(\xi) \geq f(x)$.

上的极大值可能远远小于在另一个点 x_2 上的极小值. 图 3.16 还会使我们想到, 连续函数的极大值和极小值交替出现, 即在两个相继的极大值之间总是存在一个极小值.

设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上的可微函数. 我们立即看出, 在位于区间内部的极值点上, 曲线的切线必定是水平的. (正式证明下面给出) 因此, 要在点 $\xi(a < \xi < b)$ 上达到极值, 条件

$$f'(\xi) = 0$$

是必要的. 但是, 如果 $f(\xi)$ 是极值, 而 ξ 是定义区间的端点之一, 则条件 $f'(\xi) = 0$ 不一定成立. 我们只能说: 如果左端点 a 是极大值 (极小值) 点, 则曲线的斜率 $f'(a)$ 不是正的 (负的), 如果右端点 b 是极大值 (极小值) 点, 则 $f'(b)$ 不能是负的 (正的)[1]

使得曲线 $y = f(x)$ 的切线是水平的那些点, 即对应方程 $f'(\xi) = 0$ 的根 ξ, 称为 f 的**临界点**或**平稳点**. 可微函数 f 的一切极值点, 如果是 f 的定义域的内点, 则都是平稳点. 因此, **函数的最大值点和最小值点或者是函数的平稳点, 或者是其定义区间的端点.** 这样, 为了求得函数的最大值 (最小值) 我们只须将平稳点以及两个端点上的 f 值进行比较, 并且找出其中最大者 (最小者). 如果 f 在有限个点上不存在导数, 那么我们只须将这些点也列入可能的极值点之中, 并且对这些点上的 f 值也加以比较. 因此, 确定函数最大值及最小值的主要工作就简化为求函数导数的零点, 而零点的个数通常是有限的.

作为一个简单的例子, 让我们来确定函数 $f(x) = \frac{1}{10}x^6 - \frac{3}{10}x^2$ 在区间 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最大值和最小值. 这里, 平稳点即方程 $f'(x) = \frac{6}{10}(x^5 - x) = 0$ 之根的位置是 $x = 0, +1, -1$. 算出在这些点以及区间端点上的 f 值, 我们得到

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5.2	-0.2	0	-0.2	5.2

1) 这里 $f'(a)$ 及 $f'(b)$ 指的是右、左导数.——译者注

显然，极小值出现在点 $x = \pm 1$ 上，而极大值出现在点 $x = 0$ 和 $x = \pm 2$ 上. 在区间的两个端点上函数取到最大值 5.2; 在点 $x = \pm 1$, 函数取到最小值 -0.2 (见图 3.17).

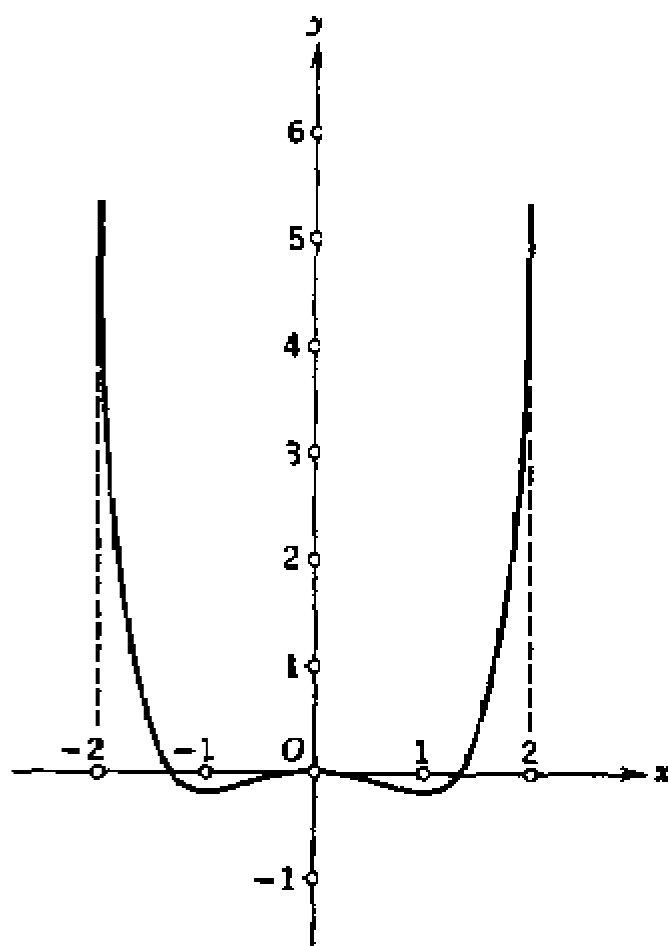


图 3.17

我们不靠几何直观而用纯分析的方法也不难证明: 当 ξ 是 f 的定义域内部的极值点时, $f'(\xi) = 0$, 只要 f 在点 ξ 是可微的. (同第 196 页洛尔定理中完全类似的考察相比较.) 如果函数 $f(x)$ 在点 ξ 具有极大值, 则对于一切充分小的但不等于零的 h 值, 表达式 $f(\xi + h) - f(\xi)$ 必须为负或为零. 所以, 当 $h > 0$ 时

$$\frac{[f(\xi+h) - f(\xi)]}{h} \leq 0,$$

而当 $h < 0$ 时

$$\frac{[f(\xi+h) - f(\xi)]}{h} \geq 0.$$

因此，如果 h 通过正值趋向于零，则上式差商的极限不能是正的，而如果 h 通过负值趋向于零，则上式差商的极限不能是负的. 然而由于我们已经假设在点 ξ 上 f 的导数存在，这两个极限值必须彼此相等，事实上等于值 $f'(\xi)$，所以它们只能为零，即 $f'(\xi)=0$. 对于极小值的情形，也可进行类似的证明. 上述证明还表明，如果左端点 $\xi=a$ 是极大值（极小值）点，则必定有 $f'(a)\le 0[f'(a)\ge 0]$；如果右端点 b 是极大值（极小值）点，则有 $f'(b)\ge 0[f'(b)\le 0]$.

表征平稳点的条件 $f'(\xi)=0$，决不是产生极值的充分条件. 可能存在这样一些点，在这些点上导数为零，即切线是水平的，但是在这些点上曲线既没有达到极大值，也没有达到极小值. 这种情况是会发生的，如果在给定点上曲线穿过它的**水平拐切线**的话，例如函数 $y=x^3$ 在点 $x=0$ 的情形.

下述准则给出了判定平稳点是极大值点或极小值点的条件. 这一准则适用于连续函数 f，如果 f 具有连续导数 f'，而 f' 最多在**有限个**点上等于零，或者更一般地说，适用于可微函数 f，如果 f' 最多在有限个点上改变符号：

函数 $f(x)$ 在其定义域的内点 ξ 上达到极值，当且仅当 x 通过这一点时导数 $f'(x)$ 变号；特别是，如果在 ξ 附近，其导数在左侧点上为负，在右侧点上为正，则函数在 ξ 上达到极小值，而在相反的情况下，函数就达到极大值.

下面用中值定理来严格地证明这一准则. 首先我们注意到：由于 $f'(x)$ 仅在有限个点上等于零，所以在 ξ 的左右侧存在区间 $\xi_1<x<\xi$ 和 $\xi<x<\xi_2$，使每个区间内 $f'(x)$ 符号相同.（这里，如果还存在使得 f' 为零的其他点，则可将其中离 ξ 最近的零点取为 ξ_1 和 ξ_2.）现在，如果 $f'(x)$ 在这两个区间内的符号不同，则对于一切充分小的 h 值，不论 h 是正的还是负的，$f(\xi+h)-f(\xi)=hf'(\xi+\theta h)$ 具有相同的符号，因此在 ξ 上达到极值. 如果 $f'(x)$ 在这两个区间内符号相同，则当 h 变号时 $hf'(\xi+\theta h)$ 变号，因此在 ξ 的一侧

$f(\xi+h)$ 大于 $f(\xi)$, 在 ξ 的另一侧 $f(\xi+h)$ 小于 $f(\xi)$, 而不存在极值. 于是上述定理得证.

同时, 我们看到: 如果在一个包含 ξ 的区间内 $f(x)$ 是可微的并且 $f'(x)$ 仅在点 ξ 附近变号, 则数值 $f(\xi)$ 是函数在此区间内的最大值或最小值.

上述证明依据的是中值定理. 我们知道, 在应用中值定理时, 如果在区间的端点上 $f(x)$ 是不可微的, 这个定理仍然可以成立, 只要在区间的其他所有点上 $f(x)$ 是可微的; 因此, 即使在 $x=\xi$ 处 $f'(x)$ 不存在, 上述证明仍然成立. 例如, 函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 达到极小值, 因为当 $x>0$ 时 $y'>0$, 当 $x<0$ 时 $y'<0$ (参阅第 188 页图 2.24). 同样, 函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在点 $x=0$ 达到最小值, 即使其导数 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ 在这一点是无穷大 (参阅第 190 页图 2.27).

决定平稳点 ξ 是极大值点还是极小值点的最简单的方法, 涉及到在这一点的**二阶导数**. 从直观上显然可以看出, 如果 $f'(\xi)=0$, 则当 $f''(\xi)<0$ 时 f 在点 ξ 达到极大值, 当 $f''(\xi)>0$ 时达到极小值. 因为在前一种情况下, 在点 ξ 的邻域内函数的曲线完全位于切线的下面, 而在后一种情况下, 曲线完全位于切线的上面. 如果 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 是连续的, $f''(\xi)$ 存在, 则可由前面的准则从分析上推出这个结果. 因为如果 $f'(\xi)=0$, 并且譬如说 $f''(\xi)>0$, 我们则有

$$f''(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(\xi+h)-f'(\xi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(\xi+h)}{h}>0.$$

由此得知, 对于一切绝对值充分小的 $h\neq 0$, 有 $\frac{f'(\xi+h)}{h}>0$; 因此在 ξ 的邻域内 $f'(\xi+h)$ 和 h 符号相同. 对于 ξ 附近的 x, 当 x 处于 ξ 左边时导数 $f'(x)$ 必须为负, 而当 x 处于 ξ 右边时 $f'(x)$ 则为正; 这就说明在点 ξ 上存在极小值.

当 $f''(x)$ 在整个 f 的定义区间 $[a,b]$ 上具有同一个符号时, 情况特别简单:

如果 $f'(x)$ 在点 ξ 等于零, 则当在整个区间上 $f''(x)<0$ 时

(即当函数的曲线上凸时)，点 ξ 是 f 的最大值点，当在整个区间上 $f''(x)>0$ 时(即当曲线下凸时)，点 ξ 是 f 的最小值点.

实际上，如果 $f''(x)<0$，则函数 $f'(x)$ 是单调减少的，因而 ξ 是其唯一的零点. 并且，当 $a\le x<\xi$ 时 $f'>0$，而当 $\xi<x\le b$ 时 $f'<0$. 根据中值定理，这再次说明当 $x\neq\xi$ 时 $f(x)<f(\xi)$. 因此可知 ξ 是严格的最大值点. 由于除了 ξ 以外不存在其他平稳点，所以 f 的最小值必须位于区间的一个端点上. 当在区间上 $f''>0$ 时，也可进行同样的论证.

举例

例1 试在一切具有给定底边和给定面积的三角形中，求出周长最小的三角形.

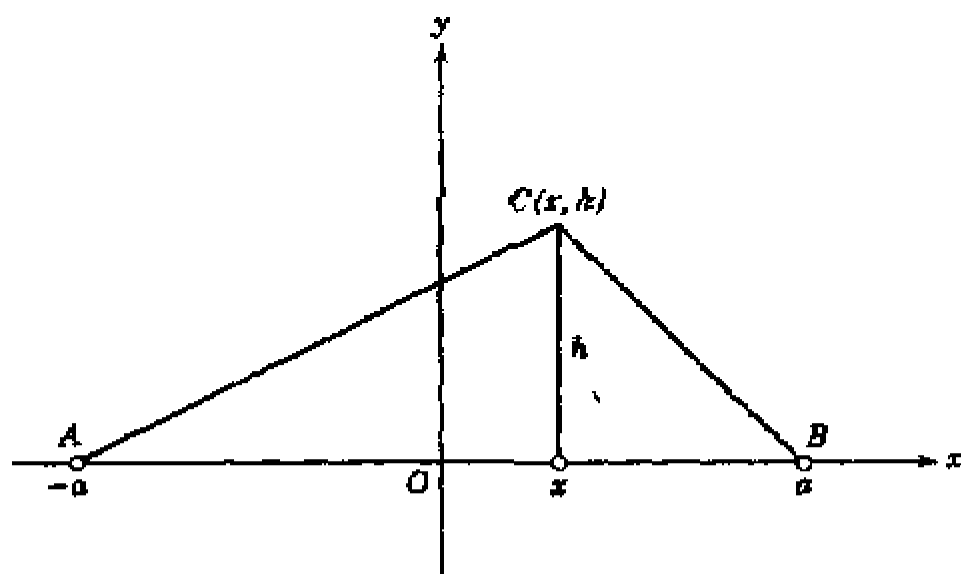


图 3.18

为了解答这个问题，我们沿给定底边 AB 取 x 轴，并将 AB 的中点取为坐标原点 (图 3.18). 如果 C 是三角形的顶点，h 是三角形的高 (h 为面积和底边所确定)，(x,h) 是顶点的坐标，则三角形的两边 AC 和 BC 之和由下式给出:

$$f(x)=\sqrt{(x+a)^2+h^2}+\sqrt{(x-a)^2+h^2},$$

这里底边长为 $2a$. 由此我们得到

$$f'(x) = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}},$$

$$\begin{aligned} f''(x) = & \frac{-(x+a)^2}{\sqrt{[(x+a)^2+h^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} \\ & + \frac{-(x-a)^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}} \\ = & \frac{h^2}{\sqrt{[(x+a)^2+h^2]^3}} + \frac{h^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h^2]^3}}. \end{aligned}$$

我们看出: (1) $f'(0)$ 等于零, (2) $f''(x)$ 总是正的; 因此在 $x=0$ 处存在最小值 (见第 273 页). 从而这个最小值由等腰三角形给出.

我们可以类似地证明. 在一切具有给定周长和给定底边的三角形中, 等腰三角形面积最大.

例2 试在给定的直线上求出一点, 使得这一点同两个已知的固定点的距离之和为最小.

设给定一条直线以及在直线同一侧的两个固定点 A 和 B. 我们希望在直线上求出一点 P, 使得距离 $PA+PB$ 具有最小的可能值[1].

我们取给定直线为 x 轴, 并且使用图 3.19 中的符号. 这时, 所考虑的距离由下式给出:

$$f(x) = \sqrt{x^2+h^2} + \sqrt{(x-a)^2+h_1^2},$$

并且我们得到

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}},$$

$$f''(x) = \frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}} + \frac{h_1^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}}.$$

由方程 $f'(\xi)=0$, 可知

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+h^2}} = \frac{a-\xi}{\sqrt{(\xi-a)^2+h_1^2}},$$

---

1) 如果 A 和 B 分别位于直线的两侧, 则 P 显然是线段 AB 与该直线的交点.

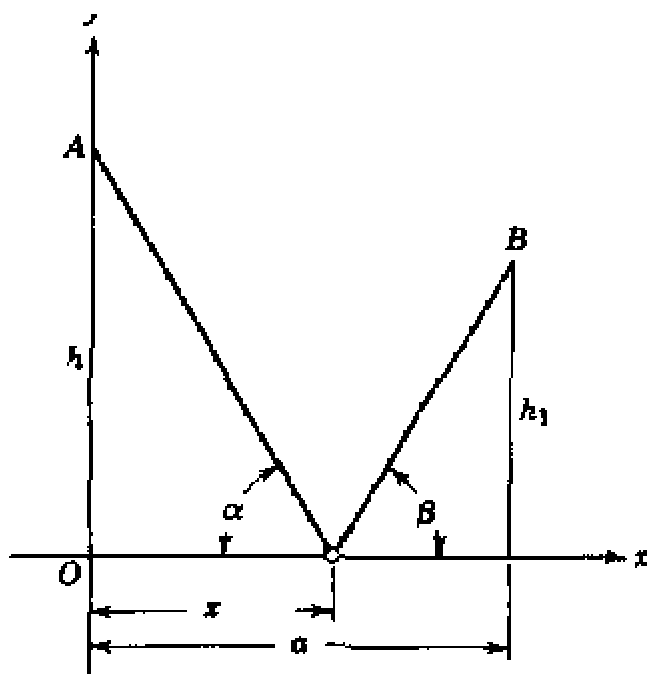


图 3.19　反射定律

或

$$\cos\alpha = \cos\beta;$$

因此两直线 PA 和 PB 与给定直线所构成的角必须相等. $f''(x)$ 的符号为正, 说明确实是最小值.

这个问题的解同光学的反射定律有着密切的联系. 根据一个重要的光学原理——著名的费尔马**最短时间原理**, 光线通过的路径决定于下述性质: 在给定条件下, 光线从点 A 到点 B 所需时间必须是最短的. 如果规定了这样的条件: 光线在从 A 到 B 的路径上, 经过给定直线上 (譬如说镜面上) 的某一点, 则我们可以看出, 当光线的"入射角"等于"反射角"时所需的时间最短.

例3　折射定律[1)]　设在 x 轴的两侧有给定的两点 A 和 B. 如果光速在 x 轴的一侧为 c_1, 在另一侧为 c_2, 要使光线由 A 到 B 的时间是最短的, 试问光线应通过怎样的路径?

显然, 时间最短的路径是由彼此相交于 x 轴上的一点 P 的两个直线段组成的. 采用图 3.20 的符号, 对于长度 PA, PB, 我们分别得到表达式 $\sqrt{x^2+h^2}$ 和 $\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}$, 将这两段直线的长度分别除以相应的光速, 并且相加, 我们便得到通过这一路径所需的

1) 前面的两个例子也可以用初等几何来处理, 而这例子不用微积分是很难求解的.

时间:

$$f(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h^2+x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}.$$

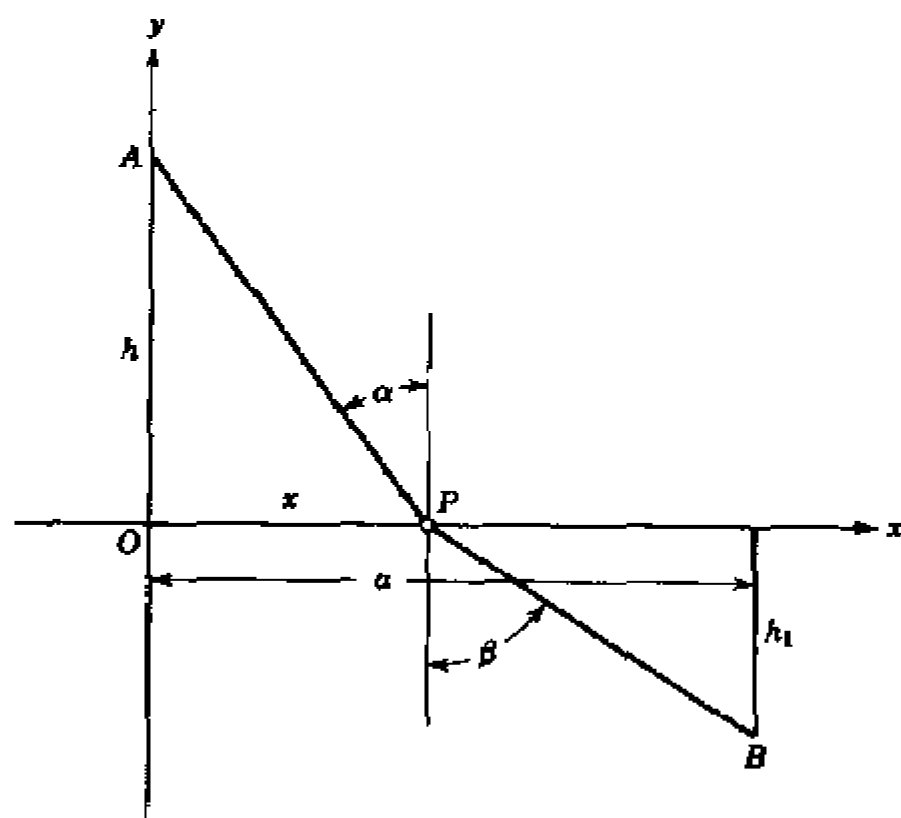


图 3.20　折射定律

将此式微分，我们得到

$$f'(x) = \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{c_1}\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}} + \frac{1}{c_2}\frac{h_1^2}{\sqrt{[h_1^2+(a-x)^2]^3}}.$$

由图 3.20 我们不难看出，方程 $f'(x)=0$，即方程

$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2-x^2}} = \frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}.$$

它等价于条件 $\frac{1}{c_1}\sin\alpha = \frac{1}{c_2}\sin\beta$，或者

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

读者可以证明：满足这个条件的点只有**一个**，并且这一点实际上给出了所要求的最小值.

这个例子的物理意义也可由光学的最短时间原理给出. 经过两点的光线描绘出时间最短的路径. 如果 c_1 和 c_2 是两种光学介质的边界面两侧的光速，则光线通过的路径将由上述公式给出，这个结果乃是**斯内耳折射定律**的一种形式.

例4 试求椭圆上的一点，使得这一点与椭圆长轴上的给定点距离最短 (图 3.21).

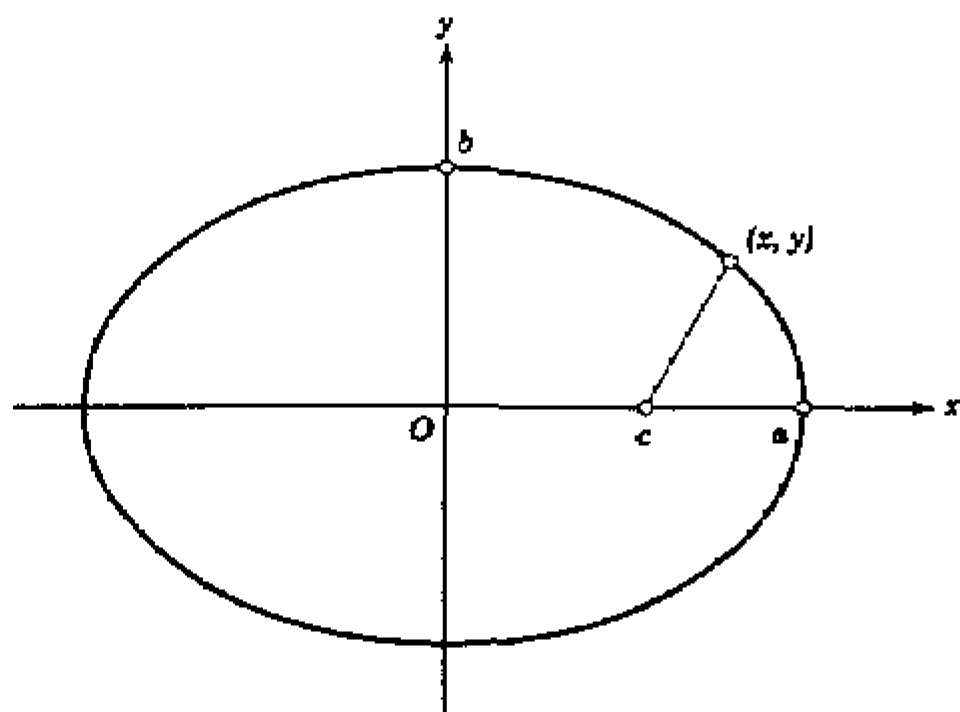


图 3.21 椭圆上与长轴上的一点距离最短的点

取形如

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (b<a)$$

的椭圆，并将长轴上的给定点取为 $(c,0)$，对于椭圆上任何点 (x,y) 同点 $(c,0)$ 的距离，我们求得表达式

$$d=\sqrt{(x-c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

其中 $-a \le x \le a$. 函数 $f(x) = d^2$ 是下凸的 ($f'' > 0$). 这个函数和 d 本身在同样的 x 上取极小值. f 的唯一的平稳点在 $x = \dfrac{c}{1 - b^2/a^2}$ 处. 如果这一点位于 d 的定义域内, 则它表示最小值点; 如果不是这样, 则 d 的极小值将对应于长轴上的最接近 c 的端点. 因而我们求得最小距离之值如下:

$$d = b\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 - b^2}}, \quad \text{如果} |c| \le a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

$$d = a - |c|, \quad \text{如果} |c| \ge a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right).$$

*3.7 函数的量阶

函数在自变量取大值时的性状的差异, 产生了量阶的概念. 虽然这个概念同积分的概念或导数的概念没有直接关系, 但是由于它非常重要, 我们在这里简要地介绍一下.

a. 量阶的概念 最简单的情形

如果自变量 x 无限地增大, 则当 $\alpha > 0$ 时, 函数 x^α, $\log x$, e^x, $e^{\alpha x}$ 也无限地增大. 然而这些函数增大的程度都大不相同, 例如, 函数 x^3 是比 x^2 更"高阶的无穷大": 这指的是, 当 x 增大时, 商 $\dfrac{x^3}{x^2}$ 本身无限增大. 类似地, 如果 $\alpha > \beta > 0$, 则函数 x^α 是比 x^β 更高阶的无穷大, 等等.

在一般情况下, 对于两个随 x 无限增大而其绝对值也无限增大的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 如果当 $x \to \infty$ 时商 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ 无限增大, 我们就说 $f(x)$ **是比** $g(x)$ **更高阶的无穷大**; 如果当 x 增大时商 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ 趋向于零, 我们就说 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更低阶的无穷大; 如果当 x 增大时, 商 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ 具有异于零的极限或者至少保持在两个固定的正数之间, 我们就说这两个函数是量阶相同的无穷大. 例如, 函数

$ax^3 + bx^2 + c = f(x)$（其中 $a \neq 0$）是与函数 $x^3 = g(x)$ 量阶相同的无穷大，因为当 $x \to \infty$ 时，商 $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^3}\right|$ 具有极限 a. 另一方面，函数 $x^3 + x + 1$ 是比函数 $x^2 + x + 1$ 更高阶的无穷大.

如果函数 $f(x)$ 是比函数 $\varphi(x)$ 更高阶的无穷大，则这两个函数之和的量阶与 $f(x)$ 相同. 因为 $\left|\frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x)}\right| = 1 + \left|\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right|$ 根据假设，当 x 增加时这个表达式趋向于 1

b. 指数函数与对数函数的量阶

当规定变量 x 的量阶为 1，幂 $x^\alpha (\alpha > 0)$ 的量阶为 α 时，我们就可以试着用一个尺度来度量许多函数的量阶了. 这时，n 次多项式显然应具有量阶 n. 如果一个有理函数分子的量阶比分母的量阶高 h，则这个有理函数应具有量阶 h.

但是可以证明，想用上述尺度来描述任意函数的量阶的一切尝试都将归于失败. 因为存在这样一些函数，不论取多么大的 α，这些函数将是比 x 的幂 x^α 更高阶的无穷大；而且也存在这样一些函数，不论取多么小的正数 α，这些函数将是比幂 x^α 更低阶的无穷大. 所以，上述尺度不适用于这些函数.

我们在这里不再涉及详细的理论了，只是给出下面的定理.

定理 如果 a 是任何大于1的数，则当 x 无限增大时商 $\frac{a^x}{x}$ 趋向于无穷大.

证明 为了证明这个定理，我们作函数

$$\varphi(x) = \log \frac{a^x}{x} = x \log a - \log x;$$

显然只须证明：当 x 趋向于 $+\infty$ 时，$\varphi(x)$ 无限增大. 为此，我们考虑导数

$$\varphi'(x) = \log a - \frac{1}{x},$$

并且注意到：当 $x \ge c = \dfrac{2}{\log a}$ 时，这个导数不小于正数 $\dfrac{1}{2}\log a$
由此可知，当 $x > c$ 时

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \int_c^x \varphi'(t)dt > \int_c^x \frac{1}{2}\log a dt$$
$$\ge \frac{1}{2}(x-c)\log a,$$
$$\varphi(x) \ge \varphi(c) + \frac{1}{2}(x-c)\log a,$$

当 $x \to \infty$ 时，右端成为无穷大.

我们再来给出这一重要定理的另一种证法：取 $\sqrt{a} = b = 1+h$，我们有 $b > 1$ 和 $h > 0$. 设 n 是使得 $n \le x \le n+1$ 成立的整数；我们可以取 $x > 1$，于是 $n \ge 1$. 应用第 66 页的引理，我们有

$$\sqrt{\frac{a^x}{x}} = \frac{b^x}{\sqrt{x}} = \frac{(1+h)^x}{\sqrt{x}} > \frac{(1+h)^n}{\sqrt{n+1}} > \frac{1+nh}{\sqrt{n+1}}$$
$$> \frac{nh}{\sqrt{2n}} = \frac{h}{\sqrt{2}}\sqrt{n},$$

于是

$$\frac{a^x}{x} > \frac{h^2}{2}\cdot n,$$

因此，当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{a^x}{x}$ 趋向于无穷大.

从上面证明的这个定理，我们可以推出许多其他结果. 例如，对于每一个固定的正数 α 和每一个数 $a > 1$，当 x 增大时商 $\dfrac{a^x}{x^\alpha}$ 趋向于无穷大；即

定理 指数函数是比 x 的任何幂更高阶的无穷大.

为了证明这个定理，我们只须证明两函数之商的 α 次方根，即

$$\frac{a^{x/\alpha}}{x} = \frac{1}{\alpha}\frac{a^{x/\alpha}}{x/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{a^y}{y} \quad \left(y = \frac{x}{\alpha}\right)$$

趋向于无穷大. 而这可由上面的定理直接推出，只须将其中的 x 换为 $y = \dfrac{x}{\alpha}$

我们还可以按同样的方法证明下述定理．对于每一个正数 α，当 $x\to\infty$ 时，商 $\frac{\log x}{x^\alpha}$ 趋向于零；即

定理 对数函数是比 x 的任意小的正幂更低阶的无穷大．

证明 我们令 $\log x=y$，于是两函数之商变换为 $\frac{y}{e^{\alpha y}}$．然后，令 $e^\alpha=a$，于是 $a>1$，当 y 趋向于无穷大时，这个商 $\frac{y}{a^y}$ 趋向于零．因为当 $x\to\infty$ 时 y 趋向于无穷大，所以定理得证[1]．

根据这些结果，我们能够构造一些量阶远高于指数函数的函数，和另一些量阶远低于对数函数的函数．例如，函数 $e^{(e^x)}$ 的量阶高于指数函数，函数 $\log\log x$ 的量阶低于对数函数；而且，我们还可将符号 e 或 $\log$ 重叠起来，而将这些过程重复任意多次．

对于充分大的 x，虽然函数 $x,\log x,\log(\log x),\log[\log(\log x)]$ 等等终将成为任意大，但是增加的速度依次减小．例如，取很大的数 $x=10^{100}$，我们发现 $\log x$ 大约是 230，而 $\log(\log x)$ 仅仅大约是 5.4

c. 一点注记

上面这些讨论说明，要想对一切函数指定一些确定的数作为量阶，使得两个函数中量阶较高的一个对应较大的数，这是不可能的．例如，如果函数 x 的量阶是 1，函数 $x^{1+\varepsilon}$ 的量阶是 $1+\varepsilon$，则函数 $x\log x$ 的量阶必须大于 1、小于 $1+\varepsilon$，而不论 ε 选取得多么小．但是，这样对应的数是不存在的．

此外，我们不难看出，函数间并不总是具有明确的相对的量阶．例如，函数

$$\frac{x^2(\sin x)^2+x+1}{x^2(\cos x)^2+x}$$

当 x 增加时，并不趋向于确定的极限；相反，当 $x=n\pi$（其中 n

1) 我们可以想到另一简单的证法：对于 $x>1,\varepsilon>0$，有

$$\log x=\int_1^x\frac{d\xi}{\xi}<\int_1^x\xi^{\varepsilon-1}d\xi=\frac{1}{\varepsilon}(x^\varepsilon-1);$$

如果我们取 ε 小于 α，并且用 x^α 除不等式的两端，则可得知，当 $x\to\infty$ 时 $\frac{\log x}{x^\alpha}\to 0$．

为整数）时，函数之值是 $\frac{1}{n\pi}$，而当 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，函数之值是 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+1+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$. 于是，虽然此函数的分子和分母二者都是无穷大变量，但是其商既不保持在两个正数之间，也不趋向于零或趋向于无穷大. 所以，分子的量阶既不与分母的量阶相同，也不低于或高于分母的量阶，这个表面上很奇怪的现象只是表明，我们所下的量阶的定义并不是为了对于每一对函数进行比较. 这不是一个缺点；我们并不想要比较像上面的分子和分母这样一些函数的量阶；知道了这样两个函数之一的值，无助于了解另一个函数之值的情况.

d. 在一点的邻域内函数的量阶

刚才我们比较了当 $x\to\infty$ 时函数无限增大的程度，同样，我们也可以对于在有限点 $x=\xi$ 成为无穷大的函数进行比较.

我们称函数 $f(x)=\frac{1}{|x-\xi|}$ 在点 $x=\xi$ 是一阶无穷大，而如果 α 是正数，我们就相应地说函数 $\frac{1}{|x-\xi|^\alpha}$ 在点 ξ 将是 α 阶无穷大.

于是，我们看出，当 $x\to\xi$ 时，函数 $e^{\frac{1}{|x-\xi|}}$ 将是比一切幂 $\frac{1}{|x-\xi|^\alpha}$ 更高阶的无穷大，而函数 $\log|x-\xi|$ 将是比一切幂 $\frac{1}{|x-\xi|^\alpha}$ 更低阶的无穷大，也就是说，极限关系式

$$\lim_{x\to\xi}\left(|x-\xi|^\alpha\cdot e^{\frac{1}{|x-\xi|}}\right)=\infty$$

和

$$\lim_{x\to\xi}\left(|x-\xi|^\alpha\log|x-\xi|\right)=0$$

成立.

为了证实这一点，我们只须设 $\frac{1}{|x-\xi|}=y$；这时，上述命题就

化为第 266 页上的已知定理，因为

$$|x-\xi|^{\alpha}\cdot e^{\frac{1}{|x-\xi|}}=\frac{e^{y}}{y^{\alpha}} \text{ 和 } |x-\xi|^{\alpha}\cdot\log|x-\xi|=-\frac{\log y}{y^{\alpha}},$$

而当 x 趋向于 ξ 时 y 无限增大. （通过变换 $\frac{1}{|x-\xi|}=y$ 将函数在点 ξ 的性状化为当 $x\to\infty$ 时的性状来研究，这种方法常常是很有用的.）

e. 函数趋向于零的量阶

正像我们用量阶的概念来描述函数趋向于无穷大的程度一样，我们也可以来比较函数趋向于零时的快慢程度. 我们称当 $x\to\infty$ 时变量 $\frac{1}{x}$ 是一阶无穷小，变量 $\frac{1}{x^{\alpha}}$（其中 α 为正数）是 α 阶无穷小. 我们再次看出：**函数** $\frac{1}{\log x}$ **是比任意幂** $\frac{1}{x^{\alpha}}$ **更低阶的无穷小**，也就是说，对于每一个正数 α，关系式

$$\lim_{x\to\infty}(x^{-\alpha}\cdot\log x)=0$$

成立.

同样地，对 $x\to\xi$ 我们称变量 $x-\xi$ 是一阶无穷小，变量 $|x-\xi|^{\alpha}$ 是 α 阶无穷小. 根据前面的结果，不难证明下列关系式：

$$\lim_{x\to 0}(|x|^{\alpha}\cdot\log|x|)=0,\quad \lim_{x\to 0}(|x|^{-\alpha}\cdot e^{-\frac{1}{|x|}})=0,$$

这两个关系式通常表述如下：

当 $x\to 0$ **时，函数** $\frac{1}{\log|x|}$ **是比** x **的任何幂更低阶的无穷小；指数函数** $e^{-\frac{1}{|x|}}$ **是比** x **的任何幂更高阶的无穷小.**

f. 量阶的"O"和"o"表示法

表示函数 $f(x)$ 的量阶比函数 $g(x)$ 的量阶还要低的一种方便的方式是记为 $f=o(g)$. 这种符号表示法仅仅说明商 f/g 的极限是

零，并且对于趋向于零或趋向于无穷大的函数以及对于趋向于无穷大或趋向于有限值 ξ 的自变量 x，都同样可以采用[1].

我们现在按这种表示法重新写出前面的许多结果；例如

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha} &= o(x^{\beta}) && \text{对于}\alpha<\beta, \text{当}x\to\infty\text{时}\\
\log x &= o(x^{\alpha}) && \text{对于}\alpha>0, \text{当}x\to\infty\text{时}\\
e^{-x} &= o(x^{-\alpha}) && \text{当}x\to\infty\text{时}\\
e^{-\frac{1}{x}} &= o(x^{\alpha}) && \text{当}x\to 0\text{时 (通过正值)}\\
\log|x| &= o\left(\frac{1}{x}\right) && \text{当}x\to 0\text{时}\\
1-\cos x &= o(x) && \text{当}x\to 0\text{时},
\end{aligned}
$$

这种表示法是 E. 兰道 (Landau) 引入的，可以用来表示近似公式中误差的数量级．例如

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{当}x\to\infty\text{时}$$

它表示关系式

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}} - \dfrac{1}{2x}}{\dfrac{1}{x}} = 0.$$

类似地，对于在点 x 具有导数的函数 f，它的增量和微分之间的关系式可以写为下列形式：

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h) \quad \text{当}h\to 0\text{时}.$$

同样可以采用符号表示法 $f = O(g)$，它表示 $f(x)$ 的量阶不高于 $g(x)$ 的量阶，也就是说，对于所考虑的 x 值，商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是有界

1) 这里采用的字母"o"，是"order (阶)"一词的字头．应注意，对于趋向于零的 g，关系式 $f = o(g)$ 表示 f 是更高阶的无穷小．

的[1]. 符号 O 的用法也很灵活. 譬如像"当 $x \to \infty$ 时 $f = O(g)$"这句话的意思是：对于充分大的 x, 商 $\frac{f}{g}$ 是有界的, 例如

$$\sqrt{10x + 1} = O(x) \quad 当 x \to \infty 时.$$

类似地, "当 $x \to \xi$ 时 $f = O(g)$" 表示在点 $x = \xi$ 的充分小的邻域内 f/g 是有界的. 如

$$e^x - 1 = O(x), \quad 当 x \to 0 时$$

更一般地说, 我们可以用关系式 $f = O(g)$ 来表示 f/g 在 x 轴上的任何区域内的有界性, 而不要求 x 趋向于某一极限. 例如

$$\log x = O(x) \quad 当 x > 1 时,$$
$$x = O(\sin x) \quad 当 |x| < \frac{\pi}{2} 时$$

前面举出的含有符号 o 的一些例子, 现在可以借助于符号 O 加以改进用以表示更精确的误差估计. 例如, 对于其二阶导数 f'' 有定义并且连续的函数 f, 我们有

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x) + O(h^2) \quad 当 h \to 0 时.$$

还有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
$$\cos x = 1 + O(x^2) \quad 对于一切 x$$

对于**序列** a_n, 当下标 n 趋向于无穷大时, 也可采用这种表示法. 我们将会遇到一些有趣的"渐近"公式的例子, 在这些公式的后面都带有高阶的误差项 (见第六章附录关于 $n!$ 的斯特林 (Stirling) 公式). 在第一章 (第 61 页) 上已经提到过的著名的渐近公式表

1) 注意: $f = O(g)$ **并不**意味着 f/g 的极限为 1, **也不**意味着这个商必定具有极限.

明[1]: 小于 n 的素数的个数 $\pi(n)$ 由 $n/\log n$ 近似地给出. 这里, 也已经得到误差的量阶 而我们有更精确的结果

$$\pi(n) = \frac{n}{\log n} + O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$$

附 录

在了解微积分的严格的发展过程中, 其障碍来自如下述的基本困境: 虽然像连续性、光滑性等等这样一些基本的概念和处理方法是由于直观的迫切需要而产生的, 但是为了使它们具有某种合乎逻辑的意义, 则必须使之进一步精确化, 而由此所得到的严格定义可能包括一些不具有直观性的内涵. 例如, 连续性的严格概念必然要有一定程度的抽象, 这在连续曲线的朴素概念中并未充分反映出来, 而可微性的概念则要比曲线本身所提示的光滑性的含混概念更为严格、更为抽象. 这种差异是不可避免的, 而且会给初学者或原来不大关心逻辑技巧的人带来负担; 要求他们耐心和竭力思索. 但是, 为了使读者清楚地了解精确化的必要性, 我们指出 即使是一些简单的和直观上很好理解的例子, 也要求严格和细致, 这一点读者也许没有预料到.

A1 一些特殊的函数

这种特殊的函数通常不一定是由单独一个分析表达式给出的(见第 41 页图 1.28 和第 42 页图 1.30). 但是, 这里我们希望通过一些初等函数来构成非常简单的函数表达式用以说明几种典型的间断性和一些"不平常的"、意料不到的现象. 我们首先来介绍一个不存在间断的例子.

1) 证明不能由本书给出 请参阅 A. E. Ingham, "The Distribution of Primes" (素数的分布), Cambridge University Press, 1932

a. 函数 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$

这个函数 (见图 3.22) 最初只是对于不等于零的 x 值定义的, 而当 $x \to 0$ 时其极限显然为零. 因为通过变换 $\frac{1}{x^2} = \xi$, 这个函数变为 $y = e^{-\xi}$, 而 $\lim\limits_{\xi \to \infty} e^{-\xi} = 0$. 因此, 如果将点 $x = 0$ 处的函数值定义为 $y(0) = 0$, 自然可将这个函数加以延拓, 使之当 $x = 0$ 时也是连续的.

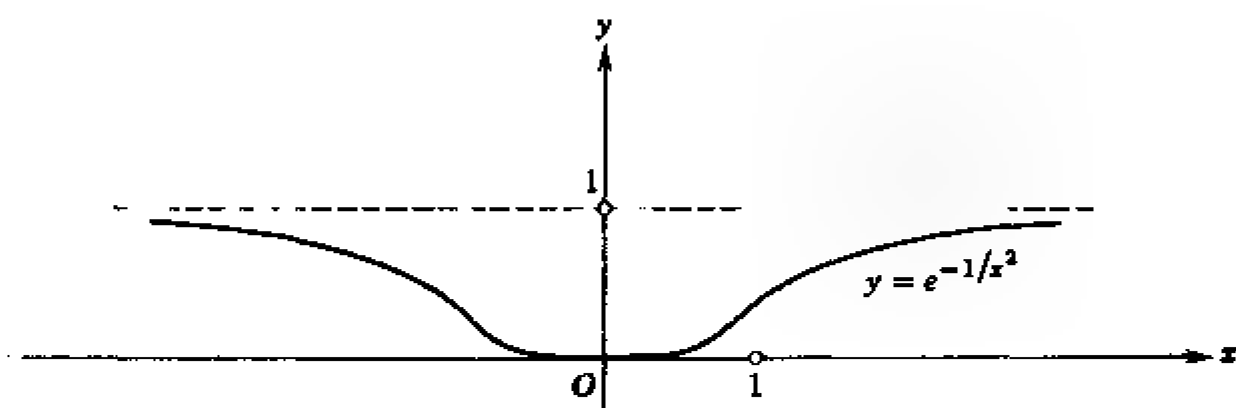


图 3.22

根据链式法则, 当 $x \neq 0$ 时, 这个函数的导数是 $y' = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 2\xi^{\frac{3}{2}} e^{-\xi}$ 当 x 趋向于零时, 这个函数的导数的极限也是零, 而我们由第 266 页上的定理可直接看出. 在点 $x = 0$ 上, 其导数

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

可以继续确定为零.

对于 $x \neq 0$ 时的高阶导数, 显然我们总是得到函数 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 和 $\frac{1}{x}$ 的多项式之乘积, 而且当 $x \to 0$ 时, 其极限总是零. 因此, 一切高阶导数同 y' 一样, 在点 $x = 0$ 都等于零.

因此, 这个函数是处处连续的和任意次可微的, 而在点 $x = 0$ 上这个函数及其各阶导数都等于零, 但是这个函数并不恒等于零. 以后我们将会了解 (第五章附录 I 1) 这种性质是多么值得注意和"不平常".

b. 函数 $y=e^{-\frac{1}{x}}$

不难看出，对于正的 x 值，这个函数的性状同上面刚刚讨论过的情形是一样的；如果 x 从正值一侧趋向于零，则函数趋向于零，其各阶导数也是如此. 如果我们将点 $x=0$ 处的函数值定义为 $y(0)=0$，则在 $x=0$ 处各阶右导数的值都等于零. 当 x 通过负值趋向于零时，情况则大不相同；因为这时函数及其各阶导数将成为无穷大，而在点 $x=0$ 处左导数并不存在. 因此，在点 $x=0$，函数具有一种特殊的间断性，这种间断性与第 39—40 页上讨论过的有理函数的无穷大间断性完全不同 (图 3.23).

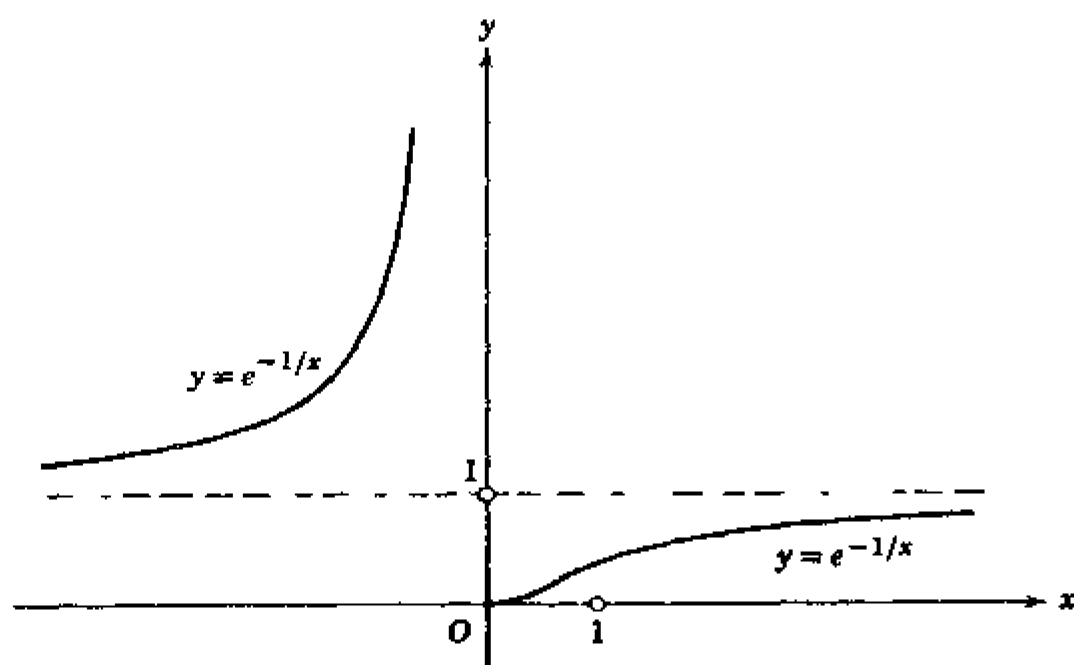


图 3.23

c. 函数 $y=\tanh\dfrac{1}{x}$

正如在第 71 页上所看到的，由一些简单的函数通过取极限可以得到具有跳跃性间断的函数. 而第 169 页上定义的指数函数以及函数的复合原理，为我们提供了由初等函数构造具有这种间断性的函数的另一种方法，而不必通过任何求极限的过程；例如函数

$$y=\tanh\frac{1}{x}=\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$$

及其在点 $x=0$ 处的性状. 这个函数最初在点 $x=0$ 是没有定义的. 当 x 通过正值趋向于点 $x=0$ 时, 函数的极限显然为 1; 而当 x 通过负值趋向于点 $x=0$ 时, 函数的极限为 -1. 当 x 增加而通过 0 时, 函数值突然增加 2(图 3.24). 另一方面, 由第 3.7 节 b(第 279 页) 不难得知, 其导数

$$y'=-\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{4}{\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\right)^2}$$

从两边都趋向于零[1].

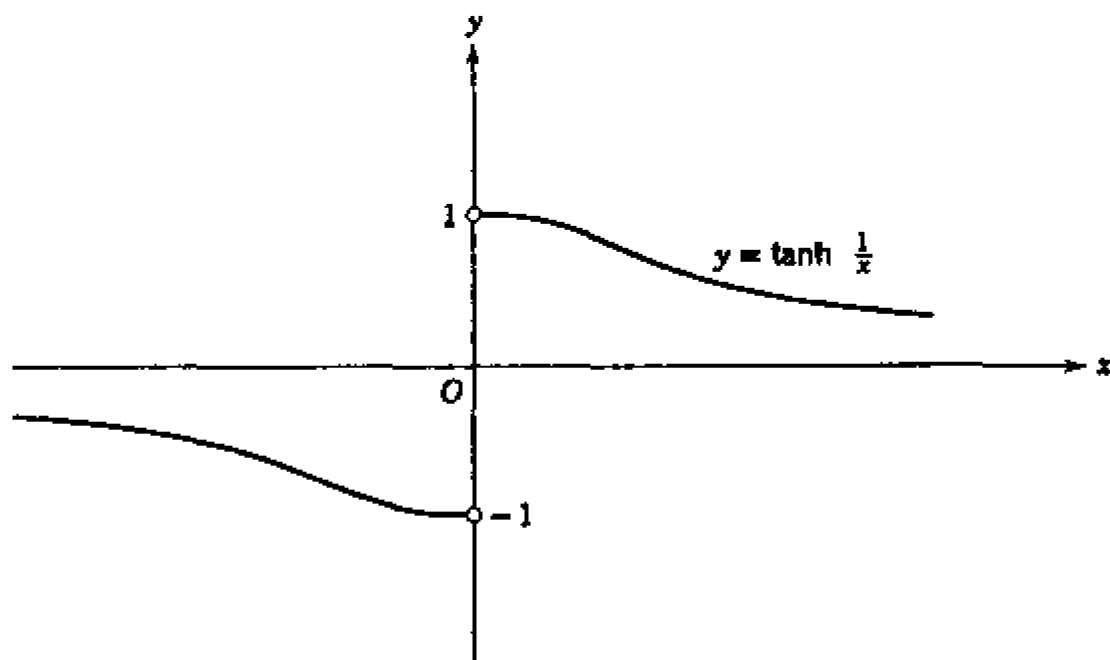


图 3.24

d. 函数 $y=x\tanh\frac{1}{x}$.

在函数

$$y=x\tanh\frac{1}{x}=x\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$$

的情况下, 上述的间断性由于因子 x 的存在而消灭. 当 x 不论从哪一边趋向于零时, 这个函数的极限都是零, 所以我们仍然可以将

1) 存在"跳跃"性间断的另一个例子是函数 $y=\arctan\frac{1}{x}$, 当 $x\to0$ 时.

$y(0)$ 适当地定义为零. 这时, 在 $x=0$ 处函数是连续的, 但是其一阶导数

$$y' = \tanh\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\frac{1}{\cosh^2\dfrac{1}{x}}$$

与上一个例子正好具有同一类间断性. 此函数的图形是一条带隅角的曲线 (图 3.25). 在点 $x=0$ 处, 函数没有导数, 在其右导数之值为 $+1$, 左导数之值为 -1.

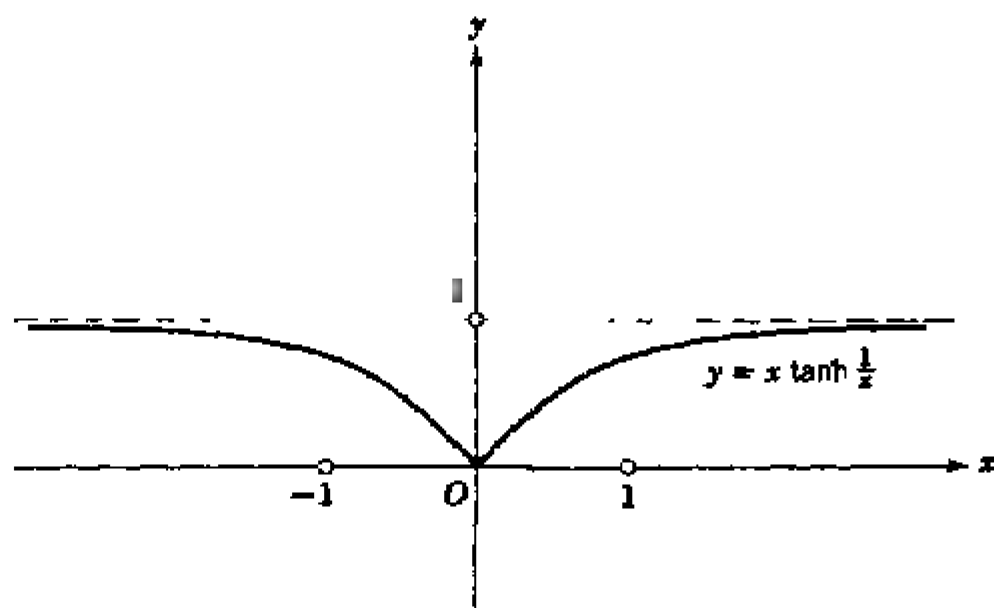


图 3.25

e. **函数 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$, $y(0)=0$**

我们已经说过, 这个函数不是由有限多个单调部分组成的 (我们可以说, 它不是 "逐段" 单调的). 但是它仍然是连续的 (第 42 页和图 1.31). 与此相反, 其一阶导数

$$y' = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

在 $x=0$ 处具有间断性; 因为当 x 趋向于零时, 这个导数在两条边界曲线之间不断地振荡, 一会儿为正, 一会儿为负, 且各自都分别趋向于 $+\infty$ 和 $-\infty$. 在点 $x=0$ 处, 其差商是 $\dfrac{1}{h}[y(h)-y(0)] = \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$,

因为当 $h\to 0$ 时，这个表达式在 $+1$ 和 -1 之间摆动无限多次，所以在 $x=0$ 处，这个函数既没有右导数，也没有左导数.

A2　关于函数可微性的注记

在一个区间的每一点上都连续且具有导数的函数，其导数不一定是连续的.

我们考虑一个简单的例子，如函数

$$y=f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\quad 当x\neq 0时$$

和

$$f(0)=0.$$

这个函数处处有定义而且是处处连续的. 而对于一切不等于零的 x 值，其导数由下式给出：

$$f'(x)=-x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}+2x\sin\frac{1}{x}=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

当 x 趋向于零时，$f'(x)$ 没有极限. 另一方面，如果我们作差商 $\frac{1}{h}[f(h)-f(0)]=\frac{1}{h}\left(h^2\sin\frac{1}{h}\right)=h\sin\frac{1}{h}$，则立即可以看出，当 h 趋向于零时，这个差商趋向于零. 所以，在 $x=0$ 处导数存在，其值为零.

为了从直观上理解产生这种似乎矛盾现象的原因，我们从图形来考察函数（见图 3.26）. 函数在曲线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 之间振荡，并交替地与这两条曲线相切触. 函数曲线波峰的高度和它与坐标原点的距离之比在不断地变小. 但是曲线的波形并不会逐渐变平，因为曲线的斜率是由导数

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

给出的，在使得 $\cos\frac{1}{x}=1$ 的点 $x=\frac{1}{2n\pi}$ 上，斜率等于 -1，而在使得 $\cos\frac{1}{x}=-1$ 的点 $x=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ 上，斜率等于 $+1$.

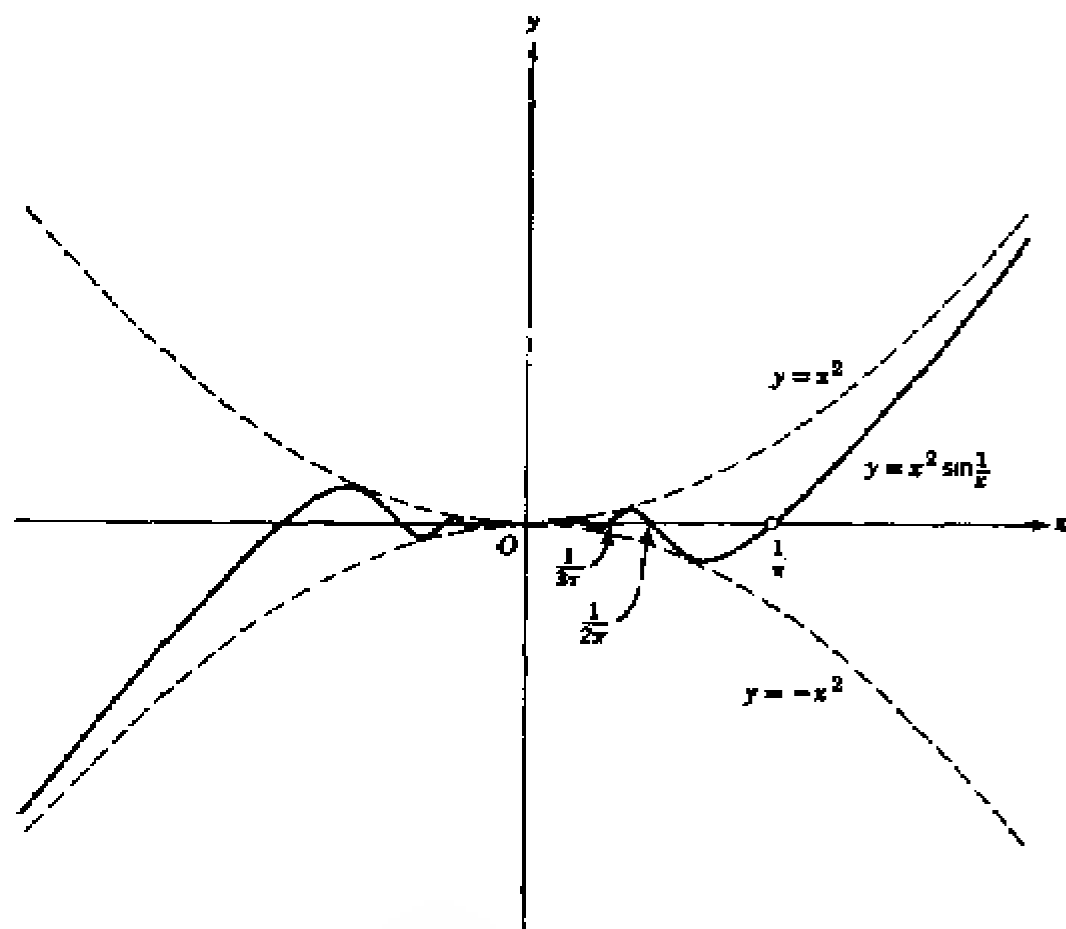


图 3.26

同上面举例说明的这种可能性(导数处处存在, 然而是不连续的)相反, 我们给出下面简单的定理, 这个定理有助于廓清前面举出的一系列例子和所进行的讨论.

定理 如果我们已知在点 $x=a$ 的邻域内函数 $f(x)$ 是连续的, 当 $x\neq a$ 时它具有导数 $f'(x)$, 并且方程 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=b$ 成立, 则在点 $x=a$ 上导数 $f'(x)$ 也存在, 并且 $f'(a)=b$

证明 由中值定理即可得到证明. 因为我们有 $\frac{1}{h}[f(a+h)-f(a)]=f'(\xi)$, 其中 ξ 是 a 和 $a+h$ 之间的某一个中间值. 现在, 如果让 h 趋向于零, 则根据假设, $f'(\xi)$ 趋向于 b, 于是定理得证.

还可以用同样的方法来证明一个相辅的定理: 如果函数 $f(x)$ 在 $a\leq x\leq b$ 上是连续的, 而在 $a<x<b$ 内导数存在, 当 x 趋向于 a 时导数无限增大, 则当 h 趋向于零时右差商 $\frac{1}{h}[f(a+h)-f(a)]$ 也无限增加, 于是在 $x=a$ 处不存在有限的右导数. 此定理的几何

意义是：在具有（有限的）坐标 $[a, f(a)]$ 的点上，函数的曲线具有垂直的切线.

第二部分　积分法

显函数

由初等函数[1] 通过反复进行有理运算，即加法、乘法和除法，以及通过作反函数的运算和复合函数的运算，可以构造出极广泛的一类函数．这样构造的函数形成一类所谓"显式"函数或"封闭表达式"[2]．作为本章第一部分的综合结果，我们可以得出一个十分普遍的事实：**每一个显式函数都可以微分，其导数仍然是显式函数**.

因此，我们已经相当完善地掌握了微分运算或微分的"算术技术"．但是，其逆过程即积分，一般说来是更为重要的，并且存在着较大的困难．这种困难在一定程度上已被微积分基本公式所克服：每一个微分公式 $F'(x) = f(x)$，都对应着一个关于 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 的等价公式或积分

$$\int f(x)dx = F(x).$$

（更确切地说，我们有 $F(x) = \int_a^x f(u)du +$ 常数．）因此，当导出更多的微分显式时，则更多的显式函数的积分便可通过显式函数来表示．在第 295 页上列出了第一个积分表；将这样一个积分表大大扩充在原则上并没有困难，虽然这是不实际的并且会造成混乱.

1）应着重指出，"初等"函数，"显式"函数和其他函数之间的区分本来是有些任意的．对于我们来说，"初等"函数一词只包括有理函数、三角函数和指数函数，以及这些函数的反函数．（这里的"初等函数"平常称为基本初等函数．——译者注）

2）这个名称表明，我们将会遇到许多其他的函数，这些函数不能用这种方式来表示，而能通过求极限的过程来构造，例如无穷级数．（本书的"显式"函数即平常所谓的初等函数．——译者注）

在微积分发展的初期，许多数学家试图以明显的形式或封闭形式来求出每一个给定的显式函数的积分或原函数.

过了一些时间以后，人们才明白这个问题在原则上是不能解决的；相反，甚至对于一些十分初等的被积函数，其积分都不能通过初等函数来表示（见第 334 页）. 因此，需要研究由初等函数通过积分过程产生的各种新型函数，从而就大大地促进了数学分析的发展. 但是，由于要求以明显的形式来表示（如果可能的话）给定的显式函数的积分，而不是无望地纠缠于查阅烦琐的积分表或进行数值积分，便引出了一些简单方法，这些方法可以灵活地变换给定积分的形式；事实上，这些方法使我们可以把要求的积分简化为积分表中的一个初等积分.

在 3.9 节里，我们将专门来叙述这些有用的方法. 在这方面，初学者应注意不要只是背诵这些方法得到的许多公式. 与此相反，读者应致力于清楚地理解积分的**方法**，并学会如何应用这些方法. 此外，读者还应记住：即使不能用这些方法来积分，**积分还会是存在的**（至少对于一切连续函数是如此），而且实际上可以通过数值方法进行积分，并能达到任何所要求的精确度；数值方法以后还要进一步讨论（6.1 节）.

在本章第二部分里，我们将尽力扩充积分法和积分的概念，而完全不涉及积分技巧的问题.

3.8　初等积分表

初 等 积 分 表

$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
1. $x^a (a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
2. $\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
3. e^x	e^x
4. $a^x (a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\log a}$
5. $\sin x$	$-\cos x$
6. $\cos x$	$\sin x$
7. $\dfrac{1}{\sin^2 x}(= \operatorname{cosec}^2 x)$	$-\cot x$
8. $\dfrac{1}{\cos^2 x}(= \sec^2 x)$	$\tan x$
9. $\sinh x$	$\cosh x$
10. $\cosh x$	$\sinh x$
11. $\dfrac{1}{\sinh^2 x}(= \operatorname{cosech}^2 x)$	$-\coth x$
12. $\dfrac{1}{\cosh^2 x}(= \operatorname{sech}^2 x)$	$\tanh x$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\lvert x\rvert < 1)$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$
14. $\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x \\ \operatorname{arc cot} x \end{cases}$
15. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{ar sinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$
16. $\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}(\lvert x\rvert > 1)$	$\operatorname{ar cosh} x = \log(x \pm \sqrt{x^2-1})$
17. $\dfrac{1}{1-x^2}\begin{cases} \lvert x\rvert < 1 \\ \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	$\operatorname{ar tanh} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ $\operatorname{ar coth} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1}$

前面证明过的每一个微分公式，都对应着一个等价的积分公式. 因为这些初等积分式一再地被用作各种积分方法的基础，所以我们将它们汇集成表. 右边一列是许多初等函数，左边一列是对应的导数. 如果我们从左到右来读这个表，那么右边的一列函数则是左边的一列对应函数的不定积分.

我们还请读者回忆在 2.9 节中证明过的微积分基本定理，特别是这一事实：任一定积分都能按下列公式从不定积分 $F(x)$ 而得到[1]：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

在下面几节中，我们将试图用各种方法把给定函数的积分的计算简化为积分表中列出的一些初等积分公式. 除了只有从经验中才能学会的一些特殊手段之外，上述简化途径主要根据两种常用的方法："换元法"和"分部积分法". 这两种方法都能使我们用许多方式来变换给定的积分；而变换的目的大都是为了通过一步或几步运算将给定的积分简化为一个或多个前面已经给出的初等积分公式.

3.9 换 元 法

复合函数的积分

积分复合函数的第一种方法是**引入新变量**(即**换元法或替换法**) 其目的在于将复合函数 (例如 $x-c$ 或 $ax+b$ 的函数) 的积分化为比较简单的函数的积分.

a. 换元公式. 复合函数的积分

复合函数的积分法则可由对应的微分链式法则推出. 对于复合

1) 在本章中我们不讨论无需首先求出一般的原函数即可计算的一些特殊定积分的问题，这些问题与本节所谈略有不同

函数 $G(u) = F[\varphi(u)]$, 我们有 (见第 244 页)

$$\frac{dG(u)}{du} = \frac{dF[\varphi(u)]}{du} = F'[\varphi(u)]\varphi'(u) \tag{16}$$

为了使这个公式成立, 只需要函数 $x = \varphi(u)$ 和 $F(x)$ 分别对于它们各自的自变量 u, x 是连续可微的, 并且 $F(x)$ 对于函数 $x = \varphi(u)$ 所取的值 x 有定义 (也就是说, 函数 φ 的值域必须属于 F 的定义域). 将这个公式在积分限 $u = \alpha$ 和 $u = \beta$ 之间进行积分, 我们得到

$$\begin{aligned} G(\beta) - G(\alpha) &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] \\ &= \int_\alpha^\beta F'[\varphi(u)]\varphi'(u)du. \end{aligned} \tag{17}$$

如果这里

$$\varphi(\beta) = b, \qquad \varphi(\alpha) = a,$$

则我们有

$$F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

令 $F'(x) = f(x)$, 我们得到 **基本置换公式**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\varphi'(u)du, \quad x = \varphi(u) \tag{18}$$

或者引入莱布尼兹的微分表示法 $d\varphi = \varphi' dx$ 又可改写为

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi)d\varphi. \tag{18a}$$

这里 $x = \varphi(u)$ 是在端点为 α 和 β 的区间 J 上定义的且具有连续导数的任何函数; 这个函数将区间的端点 α 和 β 分别映射为 $x = a$ 和 $x = b$; 而 J 的一切点在映射 φ 下所成的象含于区间 I, 并假设函数 $f(x)$ 在区间 I 上是连续的. 还有我们可以将 $f(x)$ 的任何原函数取为 $F(x)$.

应当注意的是，换元法则 (18) 并不要求映射 $x=\varphi(u)$ 将 α 和 β 之间的点仅仅映射为 a 和 b 之间的点，也不要求不同的 u 值映射为不同的 x 值；而仅仅要求 α 和 β 分别映射为 a 和 b，并且对于当 u 在 α 和 β 之间取值时 $\varphi(u)$ 所取的值 x，$f(x)$ 有定义.

如果写成不定积分，则换元法有下列形式

$$G(u)=\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du=\int f(x)dx=F(x)=F[\varphi(u)] \tag{19}$$

微分符号

$$\varphi'(u)du=\frac{dx}{du}du \text{和} dx$$

是恒等的，如果我们在形式上将分子中的 du 和分母中的 du 相消.

例 把公式 (18) 应用于被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，并且取置换 $x=\varphi(u)$，假设在所考虑的区间上 $\varphi(u)\neq 0$，这时

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}du=\int \frac{dx}{x}=\log|x|=\log|\varphi(u)|,$$

或者将变量 u 仍然换为 x，则有

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\log|\varphi(x)|. \tag{20}$$

如果我们将一些特定的函数，例如 $\varphi(x)=\log x, \varphi(x)=\sin x$ 或 $\varphi(x)=\cos x$ 代入这个重要的公式，则得到 [1)]

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x\log x}=\log|\log x|, \\ &\int \cot x dx=\log|\sin x|, \quad \int \tan x dx=-\log|\cos x|. \end{aligned} \tag{21}$$

另一些例子.

$$\int \varphi(u)\varphi'(u)du=\int x dx=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}[\varphi(u)]^2,$$

1) 这些公式以及下面的一些公式是不难验证的，只要把所得的结果进行微分，我们便重新得到被积函数.

这里 $f(x)=x$. 当 $\varphi(u)=\log u$ 时，就得到

$$\int \frac{\log u}{u}du=\frac{1}{2}(\log u)^2. \tag{22}$$

最后我们考虑

$$\int \sin^n u \cos u du$$

这里 $x=\sin u=\varphi(u)$, 因此

$$\int \sin^n u \cos u du=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{\sin^{n+1} u}{n+1}.$$

对于任何在区间 $-1\leq x\leq 1$ 上连续的函数 $f(x)$, 经过同样的置换 $x=\sin u$, 可得到

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\sin u)\cos u du=\int_{\sin\alpha}^{\sin\beta} f(x)dx$$

如果在这里取 $\alpha=0$ 和 $\beta=2\pi$, 那么我们便取得这样一个例子，其中所采用的置换 $x=\varphi(u)=\sin u=x$ 并不是在区间 $\alpha<u\leq\beta$ 上单调的映射函数. 这时，我们得到

$$\int_0^{2\pi} f(\sin u)\cos u du=\int_0^0 f(x)dx=0$$

换元法则的其他形式.

在许多应用当中，所要计算的积分是按下列形式给出的:

$$F(u)=\int h[\varphi(u)]du,$$

其中被积函数是复合函数 $h[\varphi(u)]$, 而不存在因子 $\varphi'(u)$. 但如果我们能够将被积函数 $h[\varphi(u)]$ 写成 $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ 的形式，就可应用置换法则 (18) 了. 这一点总是可以实现的，只要函数 $x=\varphi(u)$ 具有**不等于零**的连续导数 $\varphi'(u)$. 因为这时存在反函数 $u=\psi(x)$, 并

具有连续导数 $\frac{du}{dx} = \psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(u)}$. 如果取函数 $h(x)\psi'(x)$ 作为 $f(x)$, 此时的确有

$$h[\varphi(u)] = \frac{f[\varphi(u)]}{\psi'(x)} = f[\varphi(u)]\varphi'(u),$$

而由换元法则我们得到

$$\int h[\varphi(u)]du = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int f(x)dx$$
$$= \int h(x)\psi'(x)dx = \int h(x)\frac{du}{dx}dx. \tag{23}$$

要求 $\varphi'(u) \neq 0$, 是为了避免公式 (23) 中的表达式 $\frac{du}{dx}$ 成为无穷大.

初学者一定不要忘记在积分中把 $\psi(x)$ 置换为 u 时, 我们不仅必须通过新的变量 u 来表示原变量 x, 而且必须对这个新的变量进行积分; 而且在积分以前, 我们必须乘以原变量 x 对于新变量 u 的导数. 当然, 这是可由莱布尼兹表示法 $hdx = h\frac{dx}{du}du$ 联想到的. 在定积分

$$\int_a^b h[\psi(x)]dx = \int_\alpha^\beta h(u)\varphi'(u)du$$

中, 我们一定不要忘记把 (对 x 的) 积分限 a, b 换为 (对新变量 u) 相应的积分限 $\alpha = \psi(a)$ 和 $\beta = \psi(b)$.

例 为了计算 $\int \sin 2x dx$, 我们取 $u = \psi(x) = 2x$ 和 $h(u) = \sin u$. 我们有

$$\frac{du}{dx} = \psi'(x) = 2, \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{2}.$$

现在, 如果我们将 $u = 2x$ 作为新的变量代入积分, 这时积分**不是**变换为 $\int \sin u du$, 而是变换为

$$\frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{1}{2}\cos u = -\frac{1}{2}\cos 2x;$$

当然, 这个式子通过将右端微分即可验证.

如果我们在积分限 0 和 $\pi/4$ 之间对 x 积分，则对于新变量 $u=2x$ 的相应的积分限是 0 和 $\pi/2$，于是我们得到

$$\int_0^{\pi/4}\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin u du=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}.$$

另一个简单的例子是积分 $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$，这里我们取 $u=\psi(x)=\sqrt{x}$，由此 $x=\varphi(u)=u^2$．因为 $\varphi'(u)=2u$，所以有

$$\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_1^2 2\frac{udu}{u}=2\int_1^2 du=2.$$

作为第三个例子，我们考虑 $\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $\frac{1}{2}<x<1$ 上的积分．对于 $u=\frac{1}{x}$ 或 $x=\frac{1}{u}$，我们有 $dx=-\frac{du}{u^2}$，因此

$$\int_{1/2}^1\sin\frac{1}{x}dx=-\int_2^1\frac{\sin u}{u^2}du=\int_1^2\frac{\sin u}{u^2}du.$$

*b．换元公式的另一种推导方法

前面的积分公式 (17)，如果将其表示法稍加改动，也可直接予以解释，这时根据的是将这个定积分定义为和的极限 [1]，而不认为它是由链式微分法则推出来的．为了计算积分

$$\int_a^b h[\psi(x)]dx$$

(在 $a<b$ 的情况下)，我们首先对区间 $a\le x\le b$ 作任一分划，然后再使得分划越来越细．具体方法如下：如果函数 $u=\psi(x)$ 是假设为单调增加的，则在 x 轴上的区间 $a\le x\le b$ 和 $u=\psi(x)$ 之值的区间 $\alpha\le u\le\beta$ 之间存在着一一对应的关系，这里 $\alpha=\psi(a)$，$\beta=\psi(b)$．我们将这个 x 所在区间分成长度为 Δx 的 n 等分 [1]；于是对应地存

1) 这样得到的结果，只限于单调的置换，因此不像由链式微分法则推出的公式 (18) 那样一般．

1) 等长度分划的假定对于证明来说，并不是必要的．

在一种将 u 所在区间划分成一些子区间的分划，一般说来，这些子区间的长度不全相等. 我们把 x 所在区间的分点记为

$$x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b,$$

而将 u 所在区间的对应单元的长度记为

$$\Delta u_1, \Delta u_2, \cdots, \Delta u_n.$$

这时，我们所考察的积分乃是和

$$\sum_{\nu=1}^{n} h\{\psi(\xi_\nu)\}\Delta x$$

的极限，其中数值 ξ_ν 是由 x 所在区间的第 ν 个子区间中任意选取的. 现在再把这个和写为 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} h(v_\nu)\dfrac{\Delta x}{\Delta u_\nu}\Delta u_\nu$ 的形式，其中 $v_\nu = \psi(\xi_\nu)$. 根据微分学中值定理，$\dfrac{\Delta x}{\Delta u_\nu} = \varphi'(\eta_\nu)$，其中 η_ν 是在 u 所处区间的第 ν 个子区间中某个值，$x = \varphi(u)$ 表示 $u = \psi(x)$ 的反函数. 现在如果我们这样来选取数值 ξ_ν，使得 v_ν 和 η_ν 相重合，也就是说 $\eta_\nu = \psi(\xi_\nu), \xi_\nu = \varphi(\eta_\nu)$，这时我们所作的和取下列形式：

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(\eta_\nu)\varphi'(\eta_\nu)\Delta u_\nu.$$

如果我们令其中的 $n \to \infty$ 而取极限 [2]，则得到表达式

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(u)\frac{dx}{du}du$$

作为极限值，即上述积分之值. 这同前面给出的公式 (23) 是一致的.

因此，我们得到下述结论：

---

2) 这个极限存在（当 $\Delta x \to 0$ 时），并且就是上述定积分值，因为根据 $u = \psi(x)$ 的一致连续性，当 Δx 趋向于零时最大的长度 Δu_ν 趋向于零.

定理 设 $h(u)$ 是区间 $\alpha < u \leq \beta$ 上的连续函数. 如果函数 $u = \psi(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 上是单调的、连续的, 并且具有不等于零的连续导数 $\frac{du}{dx}$, 而 $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$, 则

$$\int_a^b h\{\psi(x)\}dx = \int_a^b h(u)dx = \int_\alpha^\beta h(u)\frac{dx}{du}du.$$

这种推导方法表明了莱布尼兹表示法的富有启发性的优点. 为了实行置换 $u = \psi(x)$ 我们只须将 dx 改写为 $\frac{dx}{du}du$, 并且将积分限由原来的 x 值换为对应的 u 值.

c. 例. 积分公式

在许多情况下, 都能借助换元法则来计算给定的积分 $\int f(x)dx$, 如果我们能通过适当的置换 $x = \varphi(u)$ 将这个积分化为积分表中的初等积分之一的话. 但是对于是否存在这种置换和怎样求出这种置换的问题, 不能给出一般的解答; 这里无宁是要凭实际经验和机智, 而不依赖于统一的方法.

作为一个例子, 我们来计算积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, 借助于置换 [1] $x = \varphi(u) = au, u = \psi(x) = \frac{x}{a}, dx = adu$, 并利用第 295 页上的积分表中第 13 式, 我们得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adu}{a\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\text{当 } |x| < |a| \text{ 时}, \tag{24}$$

1) 为简单起见, 我们仍将符号 dx 和 du 分开来写, 即写成 $dx = \varphi'(u)du$ 而不写成 $\frac{dx}{du} = \varphi'(u)$(见第 201 页)

通过同样的置换，我们还可得到

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{adu}{a^2(1+u^2)} = \frac{1}{a}\text{arc tan}u = \frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{x}{a}; \tag{25}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \text{ar sinh}\frac{x}{a}; \tag{26}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{ar cosh}\frac{x}{a},\ \text{当}|x|>|a|\text{时}; \tag{27}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\text{ar tanh}\frac{x}{a}, & \text{当}|x|<|a|\text{时}, \\ \frac{1}{a}\text{ar coth}\frac{x}{a}, & \text{当}|x|>|a|\text{时}. \end{cases} \tag{28}$$

这些公式经常出现，并且不难通过将右端微分来验证.

3.10 换元法的其他实例

在本节中我们收集了一些例子，读者可以作为练习仔细地加以演算.

通过置换 $u = 1 \pm x^2, du = \pm 2xdx$，我们可以推出：

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1\pm x^2}} = \pm\sqrt{1\pm x^2}, \tag{29}$$

$$\int \frac{xdx}{1\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\log|1\pm x^2|. \tag{30}$$

在上述的公式中，我们必须（在三个地方）全取正号，或者（在三个地方）全取负号.

通过置换 $u = ax+b, du = adx (a \neq 0)$，我们得到

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b|, \tag{31}$$

$$\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \tag{32}$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b). \tag{33}$$

类似地，通过置换 $u = \cos x, du = -\sin x dx$，可得到

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x|, \tag{34}$$

而通过置换 $u = \sin x, du = \cos x dx$，则得到

$$\int \cot x dx = \log|\sin x| \tag{35}$$

[参见第 298 页 (21)]. 利用相应的置换 $u = \cosh x, du = \sinh x dx$ 和 $u = \sinh x, du = \cosh x dx$，又可得到公式

$$\int \tanh x dx = \log \cosh x, \tag{36}$$

$$\int \coth x dx = \log|\sinh x| \tag{37}$$

借助于置换 $u = \left(\frac{a}{b}\right) \tan x, du = \left(\frac{a}{b}\right) \sec^2 x dx$，我们得到下列两个公式：

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2}\right) \tan^2 x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) \\ -\frac{1}{ab} \operatorname{arccot}\left(\frac{a}{b} \tan x\right), \end{cases} \tag{38}$$

和

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{ab} \operatorname{artanh}\left(\frac{a}{b} \tan x\right) \\ -\frac{1}{ab} \operatorname{arcoth}\left(\frac{a}{b} \tan x\right) \end{cases} \tag{39}$$

现在来计算积分

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

先用公式 $\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$，然后令 $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$，则有 $du = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ 这时积分变为

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right| \tag{40}$$

如果将其中的 x 换成 $x+\frac{\pi}{2}$，这个公式则变为

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{41}$$

如果应用熟知的三角公式 $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$ 和 $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$，并且取置换 $u=2x$，则得到常用的公式：

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) \tag{42}$$

和

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) \tag{43}$$

通过置换 $x=\cos u$（等价于 $u=\operatorname{arc\,cos} x$），或者更一般地说，通过置换 $x=a\cos u(a\neq 0)$，我们可将积分

$$\int\sqrt{1-x^2}dx \text{ 和 } \int\sqrt{a^2-x^2}dx$$

分别化为上述公式中的积分．于是，我们得到

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} \tag{44}$$

相应地，通过置换 $x=a\cosh u$，我们得到公式

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx = -\frac{a^2}{2}\operatorname{ar\,cosh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} \tag{45}$$

而通过置换 $x=a\sinh u$，则得到

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{ar\,sinh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}. \tag{46}$$

又通过置换 $u=\frac{a}{x}, dx=-\left(\frac{a}{u^2}\right)du$，可得到下列公式：

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sin}\frac{a}{x}, \tag{47}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{ar\,sinh}\frac{a}{x}, \tag{48}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{ar\,cosh}\frac{a}{x}. \tag{49}$$

最后，我们来考虑三个积分

$$\int \sin mx \sin nx dx, \int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx,$$

其中 m 和 n 是正整数. 根据熟知的三角公式

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

则可将每一个积分都分成两部分. 现在再分别利用置换 $u=(m+n)x$ 和 $u=(m-n)x$, 就能直接得到下列一组公式:

$$\int \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right\} & 当m\neq n时, \\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right) & 当m=n时; \end{cases} \tag{50}$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right\} & 当m\neq n时, \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2mx}{2m}\right) & 当m=n时; \end{cases} \tag{51}$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right\} & 当m\neq n时, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2mx}{2m} + x\right) & 当m=n时. \end{cases} \tag{52}$$

特别是，如果我们把它们从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 进行积分，则由这些公式可以得到下列极其重要的关系式:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & 当 m\neq n 时, \\ \pi & 当 m = n 时; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \tag{53}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{当}m \neq n\text{时}, \\ \pi & \text{当}m = n\text{时}. \end{cases}$$

这就是三角函数的正交关系，在8.4节e中我们还会遇到.

3.11 分部积分法

a. 一般公式

分部积分法是在处理积分问题时广泛应用的另一种方法，这种方法是乘积的微分法则

$$(fg)' = f'g + fg'$$

的积分表达形式.

对应的积分公式是

$$f(x)g(x) = \int g(x)f'(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

或

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx. \tag{54}$$

如果采用莱布尼兹微分表示法，这个公式变为

$$\int fdg = fg - \int gdf \tag{54a}$$

这个公式称为**分部积分公式**. 利用这个公式可将计算某一个积分问题化为计算另一个积分的问题. 因为给定的被积函数可以按照许许多多的不同方式看成乘积 $f(x)g'(x)$，所以这个公式给我们提供了一种变换积分的有效工具.

当写成定积分的形式时，分部积分公式是

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx \tag{54b}$$

这个公式可以通过乘积的导数公式在积分限 a 和 b 之间进行积分而直接推出，也可以利用公式 (54). 取其在点 b 和点 a 上的值之差而得到.

对于公式 (54b) 我们可以给出一个简单的几何解释：让我们假设 $y=f(x)$ 和 $z=g(x)$ 都是单调的，且 $f(a)=A, f(b)=B, g(a)=\alpha, g(b)=\beta$. 这时，我们可以作出第一个函数的反函数，并代入第二个函数，于是得到作为 y 的函数 z. 我们假设这个函数是单调增加的，因为 $dy=f'(x)dx, dz=g'(x)dx$, 分部积分公式可以写为 [参见第 297 页换元法则 (18)]

$$\int_{\alpha}^{\beta} y dz+\int_{A}^{B} z dy=B\beta-A\alpha,$$

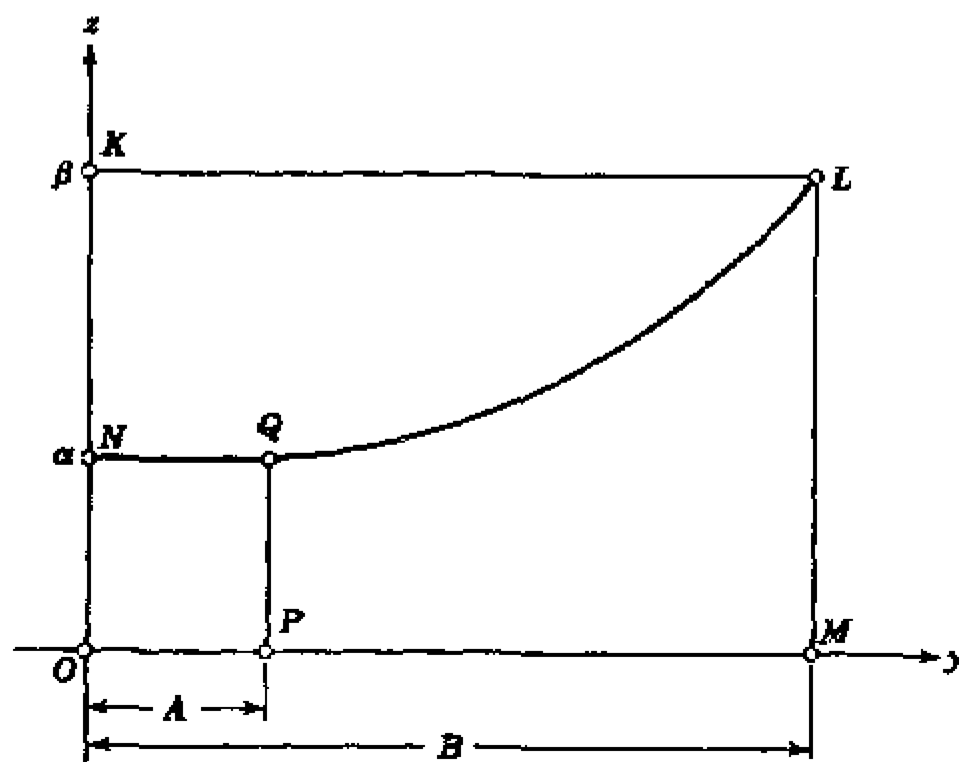


图 3.27

这与图 3.27 表明的下列关系是一致的：

面积 $NQLK+$ 面积 $PMLQ=$ 面积 $OMLK-$ 面积 $OPQN$.

下面的例子可以作为第一个例证：

$$\int \log x dx=\int \log x\cdot 1 dx.$$

这样来写被积函数，是为了表明我们要设 $f(x)=\log x$ 和 $g'(x)=1$，于是有 $f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$.

这时由公式 (54) 得到

$$\int \log x dx = x\log x - \int \frac{x}{x} dx = x\log x - x. \tag{55}$$

最后，这个表达式确实是对数函数的不定积分，通过微分立即可证实这一点.

b. 分部积分的其他例子

取 $f(x)=x, g'(x)=e^x$，于是有 $f'(x)=1, g(x)=e^x$，可知

$$\int xe^x dx = e^x(x-1). \tag{56}$$

类似地，我们得到

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x \tag{57}$$

和

$$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x. \tag{58}$$

对于 $f(x)=\log x$, $g'(x)=x^a$ 有关系式

$$\int x^a \log x dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right). \tag{59}$$

这里我们必须假设 $a\neq -1$. 当 $a=-1$ 时，我们得到的是

$$\int \frac{1}{x}\log x dx = (\log x)^2 - \int \log x \cdot \frac{dx}{x};$$

将右端的积分移到左端加以合并，于是有[见第 299 页 (22)]

$$\int \frac{1}{x}\log x dx = \frac{1}{2}(\log x)^2. \tag{60}$$

下面来计算积分 $\int \arcsin x dx$. 这里取 $f(x) = \arcsin x, g'(x) = 1$. 因此有

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

右端的积分可按第 304 页公式 (29) 算出，于是我们得到

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \tag{61}$$

用同样方法，还可求得

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) \tag{62}$$

以及其他许多同类型的公式.

下面的一些例子性质有些不同；其中反复进行分部积分，就会出现原来的积分，因此我们得到的是含有原积分的一个方程.

在下述积分中用这种方法，我们得到

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \sin bx dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx dx \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} \sin bx dx;\end{aligned}$$

现在由此方程解出积分 $\int e^{ax} \sin bx dx$, 最后得到

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) \tag{63}$$

用同样方法可以推出

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx) \tag{64}$$

c. 关于 $f(b)+f(a)$ 的积分公式

作为最后一个例子，我们来推导一个把和 $f(b)+f(a)$ (而不是由基本公式给出的差 $f(b)-f(a)$) 表示成定积分的著名公式. 引入

$1 = g'(x)$. 这里 $g(x) = x - m$, 其中 m 为任意常数，然后对于下述不定积分进行分部积分. 我们有

$$\int f(x)dx + \int f'(x)(x-m)dx = f(x)(x-m),$$

在 a 和 b 之间取定积分，则有

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)(x-m)dx = f(b)(b-m) - f(a)(a-m).$$

现在我们将 a 和 b 之间的平均值 $\frac{1}{2}(a+b)$ 取为 m, 则得到

$$\frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (x-m)f'(x)dx,$$

这一点读者是不难验证的.

d. 递推公式

在许多情况下，被积函数不只是自变量的函数，而且还依赖于整数指标 n. 这时经过分部积分，我们得到的往往不是积分的值，而是另一个类似的表达式，其中指标 n 具有较小的值. 这样，经过几步以后，我们就能得到可用第 279 页上的积分表来处理的一个积分. 这种方法称为**递推法**.

下面举例加以说明. 我们可以反复应用分部积分来计算下列三角函数的积分:

$$\int \cos^n x dx, \int \sin^n x dx, \int \sin^m x \cos^n x dx,$$

其中 m 和 n 都是正整数. 对于第一个积分，取 $f(x) = \cos^{n-1} x, g(x) = \sin x$, 我们得到

$$\int \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx;$$

右端可以写成下面的形式:

$$\cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int \cos^n x dx;$$

于是经过整理后可得到递推关系式:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx. \qquad (65)$$

现在反复应用这个公式(替换指标),就可以使被积函数的指标逐步减小,直到最后得到积分

$$\int \cos x dx = \sin x \text{ 或 } \int dx = x,$$

究竟得到哪一个积分,取决于 n 是奇数还是偶数.用同样的方法,还可得到类似的递推公式

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \qquad (66)$$

和

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx. \qquad (67)$$

特别是,我们有 $(n=2)$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

和

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x),$$

这同以前用换元法得到的结果一样 [第 305 页公式 (42), (43)].

几乎不需要再指出,我们可以用完全相同的方法来计算相应的下列双曲函数的积分:

$$\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{2}(-x + \sinh x \cosh x), \qquad (68)$$

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x). \qquad (69)$$

还可得到另一些递推公式：

$$\int (\log x)^m dx = x(\log x)^m - m\int (\log x)^{m-1}dx, \tag{70}$$

$$\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx, \tag{71}$$

$$\int x^m \sin x dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x dx, \tag{72}$$

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x dx, \tag{73}$$

$$\int x^a(\log x)^m dx = \frac{x^{a+1}(\log x)^m}{a+1} - \frac{m}{a+1}\int x^a(\log x)^{m-1}dx \quad (a \neq -1). \tag{74}$$

e. π 的沃里斯 (Wallis) 无穷乘积表示

利用积分 $\int \sin^n x dx (n > 1)$ 的递推公式，我们可以将数 π 表示为“无穷乘积”的精彩的表达式. 首先在公式

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

中，我们加上积分限 0 和 $\frac{\pi}{2}$，于是得到

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx, \quad 当 n > 1 时. \tag{75}$$

再反复应用递推公式，对于 $n = 2m$ 和 $n = 2m+1$ 两种情况，我们分别得到

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx, \tag{76}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x dx, \tag{76a}$$

因此

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, \tag{77}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3}. \tag{77a}$$

两式相除，得到

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx} \tag{78}$$

当 m 无限增大时，右端的两个积分之商收敛于 1. 这一点从下面的讨论中便可得知. 在区间 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 中，$0 < \sin x < 1$，我们有

$$0 < \sin^{2m+1} x \le \sin^{2m} x \le \sin^{2m-1} x;$$

因此

$$0 < \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x dx$$

现在我们用 $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx$ 来除每一项，并且注意到公式 (75)

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx} = \frac{2m-1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m},$$

我们有

$$1 \le \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx} < 1 + \frac{1}{2m}.$$

由此即可推出上述命题.

最后，关系式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\tag{79}$$

成立.

这个乘积公式 (沃里斯提出的)，及其简单的构成规律，给出数 π 和整数之间的一种非常奇特的关系式.

关于 $\sqrt{\pi}$ 的乘积

作为一个简单的推论，我们来推导关于 $\sqrt{\pi}$ 的同样奇特的表达式. 如果我们注意到

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{2m+1}=1,$$

则可写出

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2m-2)^2}{3^2\cdot 5^2\cdots(2m-1)^2}2m=\frac{\pi}{2};$$

取平方根，并且将分子和分母都乘以 $2\cdot 4\cdots(2m-2)$，就有

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}&=\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdots(2m-2)}{3\cdot 5\cdots(2m-1)}\sqrt{2m}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2m-2)^2}{(2m-1)!}\sqrt{2m}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2m)^2}{(2m)!}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{2m}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{(2^2\cdot 1^2)(2^2\cdot 2^2)(2^2\cdot 3^2)\cdots(2^2\cdot m^2)}{(2m)!\sqrt{2m}}.\end{aligned}$$

由此，最后得到

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}=\sqrt{\pi},\tag{80}$$

—沃里斯乘积的一种形式，这在后面我们还会用到 (参见第六章附录).

*3.12 有理函数的积分法

17 世纪和 18 世纪, 数学家们曾全神贯注地寻找各种能够明确地积分出来的初等显函数. 他们发明了大量的巧妙方法, 同时奠定了更深一步认识的基础. 后来, 当我们认识到以封闭形式来完成一切显函数的积分不但是做不到的, 而且实际上也不是重要的目的时, 那么对于为这种问题而提出的一些冗长烦琐的处理方法就逐渐显得不重要了. 但是, 还有一个很有意义的一般结果:

变量 x 的一切有理函数 $R(x)$, 都能借助于第 295 页的表中列出的初等积分用显式函数表示出来.

这个一般结果在高等复变函数论中很容易得到. 但是介绍一种只用实变量的初等推导方法仍然是有价值的.

有理函数是形式为

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{81}$$

的函数, 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0, \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \quad (b_n \neq 0). \end{aligned}$$

我们可以想到, 每一个多项式都能直接进行积分, 且其积分本身也是多项式. 所以, 我们需要考虑的只是那些分母 $g(x)$ 不为常数的有理函数, 而且, 我们总是可以假设分子的次数小于分母的次数 n. 否则, 用多项式 $g(x)$ 除多项式 $f(x)$, 我们便得到次数小于 n 的余项; 换句话说, 我们可以写成 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 其中 $q(x)$ 和 $r(x)$ 也是多项式, 而 $r(x)$ 的次数小于 n. 因此, 对 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的积分就化为对多项式 $q(x)$ 和 "真分式" $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ 的积分. 我们进一步注意到: 函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可以表示为一些函数 $\dfrac{a_\nu x^\nu}{g(x)}$ 之和, 于是我们只需要考虑形如 $\dfrac{x^\nu}{g(x)}$ 的函数的积分.

a. 基本类型

对于类型 (81) 的最一般的有理函数的积分，我们分几步来进行．首先来研究这样一些函数，其分母 $g(x)$ 具有特别简单的形式：

$$g(x) = x^n,$$

或

$$g(x) = (1+x^2)^n,$$

其中 n 是任何正整数．

然后，我们可以把比较一般的情况：$g(x) = (\alpha x+\beta)^n$——线性表达式 $\alpha x+\beta(\alpha\neq 0)$ 的幂，或者 $g(x) = (ax^2+2bx+c)^n$——定号二次表达式[1]的幂，化为上面这种最简单的情况．如果 $g(x) = (\alpha x+\beta)^n$，我们引入 $\xi = \alpha x+\beta$ 作为新变量．于是 $\dfrac{d\xi}{dx} = \alpha$，而 $x = \dfrac{1}{\alpha}(\xi-\beta)$ 也是 ξ 的线性函数．每个分子 $f(x)$ 变成同次的多项式 $\varphi(\xi)$，结果

$$\int \frac{f(x)}{(\alpha x+\beta)^n}dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{\varphi(\xi)}{\xi^n}d\xi.$$

在第二种情况下，我们写为

$$ax^2+2bx+c = \frac{1}{a}(ax+b)^2+\frac{d^2}{a}(d^2 = ac-b^2, d>0);$$

因为我们已经假设这个表达式是二次的和定号的，所以 $ac-b^2$ 必定为正，并且 $a\neq 0$．引入新变量

$$\xi = \frac{ax+b}{d},$$

---

1) 二次表达式 $Q(x) = ax^2+2bx+c$ 称为"定号的"，如果对于一切实数 x，它所取的值具有相同的符号，也就是说，方程 $Q(x)=0$ 没有实根．为此，其充分必要条件是"判别式" $ac-b^2$ 为正．当然，这可由方程之根的明显公式 $\frac{1}{a}(-b\pm\sqrt{b^2-ac})$ 推出．与此等价地，定号二次表达式是不能分解为两个实线性因式的二次表达式的．

我们得到被积函数的分母为 $\left[\left(\frac{d^2}{a}\right)(1+\xi^2)\right]^n$ 的积分.

因此，为了求出分母为线性式或定号二次式的幂的有理函数的积分，只要能积分下列类型的函数就足够了：

$$\frac{1}{x^n},\quad \frac{x^{2\nu}}{(x^2+1)^n},\quad \frac{x^{2\nu+1}}{(x^2+1)^n}.$$

事实上，我们将看到，即使是这些类型也不需要在一般情况下来处理，因为我们能够把每一个有理函数的积分，化为这三种函数在 $\nu=0$ 时非常特殊的形式的积分. 因此，现在我们集中考虑下列三个基本类型的积分：

$$\frac{1}{x^n},\quad \frac{1}{(x^2+1)^n},\quad \frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

b. 基本类型的积分

对于第一种类型的函数 $\frac{1}{x^n}$ 的积分，如果 $n=1$，则直接得到表达式 $\log|x|$，如果 $n>1$，则得到表达式 $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$，因此，在这两种情况下，其积分都是初等函数. 对于第三种类型的函数，通过引入新变量 $\xi=x^2+1$，也能直接进行积分，由此我们得到 $2xdx=d\xi$，以及

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^n}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\xi}{\xi^n}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\log(x^2+1) & \text{如果}n=1,\\ -\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} & \text{如果}n>1.\end{cases}$$

最后，为了计算积分

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n},$$

其中 n 是任何大于 1 的整数，我们采用递推法：先取

$$\frac{1}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}-\frac{x^2}{(x^2+1)^n},$$

则有

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n},$$

应用第 308 页公式 (54), 设

$$f(x) = x, g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n},$$

那么我们可以通过分部积分来变换右端. 于是, 如刚才所得

$$g(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}},$$

因而, 得到

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

这样, 计算积分 I_n 化为计算积分 I_{n-1}. 如果 $n-1>1$, 则将同样的处理方法应用于后一积分, 如此继续下去, 直至最后达到表达式

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc}\tan x.$$

总之, 我们看到积分 I_n[1] 可以通过有理函数和函数 arc tan x 表示出来.

顺便指出, 若采用置换 $x = \tan t$, 我们也可以直接求函数 $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ 的积分; 这时, 我们有 $dx = \sec^2 t dt$ 和 $\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 t$, 因此

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \cos^{2n-2} t dt,$$

1) 函数 $\frac{1}{(x^2-1)^n}$ 的积分也能用相同的方法来计算, 通过相应的递推方法, 我们可将这个积分化为积分

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar}\tanh x (\text{或 } \operatorname{ar}\coth x)$$

我们已经学会 [第 313 页, 式 (65)] 如何计算这个积分.

c. 部分分式

现在我们已经可以来积分最一般的有理函数了. 首先利用下一事实: 每一个有理函数都能够表示为所谓**部分分式**之和, 即表示为一个多项式和有限个有理函数之和, 其中每一个有理函数或者其分母是线性式的幂, 而分子是常数, 或者其分母是定号二次式的幂, 而分子是线性函数. 如果分子 $f(x)$ 的次数低于分母 $g(x)$ 的次数, 当然不出现多项式. 每一个部分分式的积分, 我们是已经知道的. 按照第 318 页的论述, 分母可以化为特殊的形式 x^2 和 $(x^2+1)^n$ 之一, 因此分式就是第 318 页上的基本类型积分的组合.

对于分解成上述部分分式的可能性, 我们不准备给出一般的证明. 我们只是叙述一个读者不难理解的定理, 并且通过实例说明在一些典型的情况下怎样才能实现这一分解. 实际上, 我们只是处理一些比较简单的函数, 否则计算过程将会十分复杂.

我们从初等代数已经知道, 每一个实多项式 $g(x)$ 都能写成下列形式 [1]:

$$g(x)=a(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x^2+2b_1x+c_1)^{r_1}(x^2+2b_2x+c_2)^{r_2}\cdots,$$

这里, 数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 是方程 $g(x)=0$ 的不同的实根, 正整数 $l_1,l_2,\cdots$ 表示这些根的重根数; 因式 $x^2+2b_\nu x+c_\nu$ 表示具有共轭复根的定号二次式, 其中任何两个都不相同, 正整数 $r_1,r_2\cdots$ 为各共轭复根的重根数.

我们假设, 分母 $g(x)$ 或者就是以这种形式给出的, 或者是通过计算实根和复根把它写成这种形式. 还假设, 分子 $f(x)$ 的次数低于分母 $g(x)$ 的次数 (见第 317 页). 这时, 关于分解成部分分式的定理可以表述如下: 对于每一个因式 $(x-\alpha)^l$, 其中 α 是任一个

---

1) 这个所谓代数学基本定理的真正的**证明**, 并不属于代数学的范围. 根据复变函数论的方法, 这个定理是很容易证明的.

l 重实根，我们可以来定出下列形式的表达式：

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_l}{(x-\alpha)^l},$$

而对于乘积中每一个自乘 r 次的二次因式 $Q(x)=x^2+2bx+c$，我们可以确定下列形式的表达式：

$$\frac{B_1+C_1x}{Q}+\frac{B_2+C_2x}{Q^2}+\cdots+\frac{B_r+C_rx}{Q^r},$$

使得函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是所有这些表达式之和（A_ν, B_ν, C_ν 均为常数）换句话说，商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 能够表示为一些分式之和，其中每一个分式都属于前面已被积分了的那些类型之一[1]

在一些特殊情况下，通过观察就很容易进行部分分式的分解．例如，如果 $g(x)=x^2-1$，我们立即看出

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)},$$

于是

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

1）我们简要地介绍一种方法，当 $g(x)$ 能够完全分解成线性因式时，根据这种方法就可以证明这种分解成部分分式的可能性，而不必应用复变函数的理论　如果 $g(x)=(x-\alpha)^k h(x)$，而 $h(\alpha)\neq 0$，则在方程

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)(x-\alpha)^k}=\frac{1}{h(\alpha)}\frac{f(x)h(\alpha)-f(\alpha)h(x)}{(x-\alpha)^k h(x)}$$

的右端，当 $x=\alpha$ 时，其分子显然等于零，所以它的形式是 $h(\alpha)(x-\alpha)^m f_1(x)$，其中 $f_1(x)$ 也是一个多项式，整数 $m\geq 1$，并且 $f_1(\alpha)\neq 0$　我们记 $\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}=\beta$，于是得到

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\beta}{(x-\alpha)^k}=\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{k-m}h(x)}$$

继续进行这一过程，我们能够逐渐减小分母中出现的 $(x-\alpha)$ 之幂的次数，直到不再剩有这样的因式时为止．在剩余的分式上，我们对于 $g(x)$ 的另一个根重复进行上述过程，而 $g(x)$ 有多少不同的因式，就重复进行多少次　不仅对于实根，而且对于复根，都这样做，并且将共轭复分式合并起来．最后我们便把它完全分解成部分分式．

更一般地说来，如果 $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$，即 $g(x)$ 是具有两个实零点 α 和 β 的非定号二次表达式，我们则有

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\frac{1}{(x-\alpha)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)}\frac{1}{(x-\beta)},$$

于是

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$$

d. 分解成部分分式举例. 待定系数法

如果 $g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，当 $i\neq k$ 时 $\alpha_i\neq\alpha_k$，即方程 $g(x)=0$ 只有单重的实根，并且分子 $f(x)$ 是次数低于 n 的任一多项式，则用部分分式来表示时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 具有下列简单的形式：

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha_1}+\frac{a_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-\alpha_n}.$$

现在用 $(x-\alpha_1)$ 乘这个等式的两端，并且消去左端以及右端第一项中分子和分母的公因子 $(x-\alpha_1)$，然后令 $x=\alpha_1$，则我们得到系数 a_1 的明显表达式

$$a_1=\frac{f(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}.$$

由乘积的微分法则，读者可以看出：右端的分母是 $g'(\alpha_1)$，即函数 $g(x)$ 在点 $x=\alpha_1$ 的导数. 用这种方法，还可以得到关于 $a_2,a_3,\cdots$ 的类似公式，从而推出部分分式展开式：

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)(x-\alpha_1)}+\frac{f(\alpha_2)}{g'(\alpha_2)(x-\alpha_2)}+\cdots+\frac{f(\alpha_n)}{g'(\alpha_n)(x-\alpha_n)}$$

在分母 $g(x)$ 具有重根的情况下，一个典型的例子是函数 $\dfrac{1}{x^2(x-1)}$. 根据第 321 页，这个函数可以表示为

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$$

用 $x^2(x-1)$ 乘这个等式的两端，则得到

$$1=(a+b)x^2-(b-c)x-c$$

这个等式对于一切 x 值都成立，我们必须根据这个条件来确定系数 a,b,c. 只有当多项式 $(a+b)x^2-(b-c)x-c-1$ 的系数全为零时，这个条件才能成立；也就是说，我们必须有 $a+b=b-c=c+1=0$，或 $c=-1, b=-1, a=1$. 于是我们得到分解式

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2},$$

结果有

$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\log|x-1|-\log|x|-\frac{1}{x}$$

下面，我们来分解函数 $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$，其分母具有复零点，这时按下式来进行：

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

其中的系数，我们可求得为 $a+b=c=a-1=0$，于是

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1},$$

所以

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

作为第三个例子，我们考虑函数 $\dfrac{1}{x^4+1}$，积分这个函数甚至在莱布尼兹时代就曾是一个难题. 现在，我们可以将分母表示为两个二次因式的乘积[1]

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x).$$

---

1) 将 x^4+1 分解为实二次因式，相当于分解为共轭复线性因式

$$x^4+1=[(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^{-1})][(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^{-3})],$$

其中

$$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$$

是 $+1$ 的一个八次方根和 -1 的一个四次方根 (见 115 页).

所以，我们得知：当分解成部分分式时将具有下列形式：

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

为了确定系数 a, b, c, d，我们利用等式

$$(a+c)x^3+(b+d-a\sqrt{2}+c\sqrt{2})x^2+(a+c-b\sqrt{2}+d\sqrt{2})x+(b+d-1)=0,$$

满足这个等式的系数之值如下：

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad d=\frac{1}{2}.$$

所以，我们有

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

利用第 318 页上给出的方法，我们得到

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log|x^2+\sqrt{2}x+1| - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log|x^2-\sqrt{2}x+1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1),$$

不难由微分法来验证这个结果.

上述各例说明了积分有理函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的一般方法. 我们首先做除法，把它化为 f 的次数小于 g 的次数的情况；然后，将 $g(x)$ 分解为线性因式和定号二次因式，并将乘积组合为这种因式的幂. 我们写出 $\frac{f}{g}$ 的**适当的**部分分式表示式，其中带有**未定**系数 $a, b, c, \cdots$. 将整个式子乘以 $g(x)$，并且**比较**所得的（多项式的）恒等式同次幂的**系数**，我们就得到含未知系数的线性方程组，如果我们确实写出了部分分式展开式的正确形式，则这个方程组恰能确定出这些未知系数. 这时，我们就可以用前面讨论过的法则来积分所得到的任一部分分式.

3.13 其他几类函数的积分法

a. 圆和双曲线的有理表示法初阶

另外还有几种常见的函数的积分，也可以简化为有理函数的积分．首先来讲一讲关于三角函数和双曲函数的某些基本事实，这样我们就会更好地理解这种简化途径．我们设 $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$，则由初等三角学可得下列简单的公式：

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

事实上，由

$$\frac{1}{1+t^2}=\cos^2\frac{x}{2}\text{ 和 }\frac{t^2}{1+t^2}=\sin^2\frac{x}{2},$$

并由基本公式

$$\sin x=2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\quad\text{和}\quad\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},$$

我们便可得到上述公式．这些公式说明：$\sin x$ 和 $\cos x$ 二者都能通过量 $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ 表成有理式．经过微分，我们有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1+t^2}{2},$$

于是

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2};\tag{82}$$

因此，导数 $\frac{dx}{dt}$ 也是 t 的有理表达式．

* 在图 3.28 中给出了三角函数的几何表示及其几何意义．在 u,v 平面上有圆 $u^2+v^2=1$．如果 x 表示图中的角 TOP，则点 P 的坐标是 $u=\cos x, v=\sin x$．根据初等几何学的定理，顶点在点 $u=-1, v=0$ 的角 OSP 等于 $\frac{x}{2}$ 并且我们由图可以看出参数 t 的

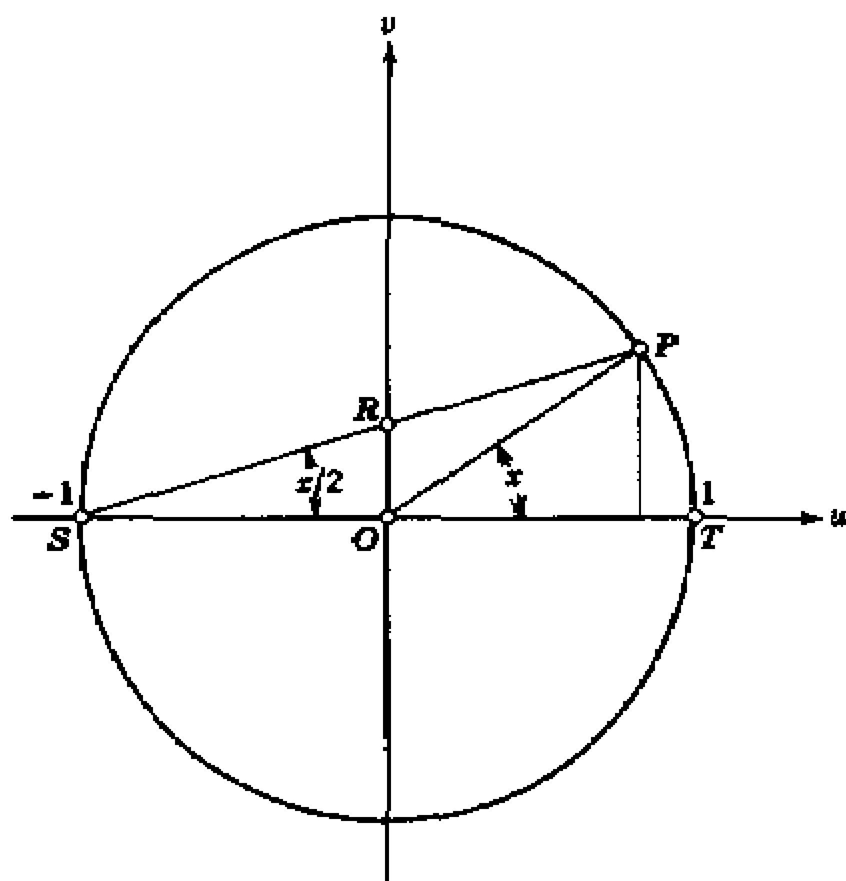


图 3.28　三角函数的参数表示

几何意义：$t=\tan\frac{x}{2}=OR$，其中 R 是圆上的点 P 通过 S 在 v 轴上的“投影”．如果点 P 从 S 出发沿正方向绕圆一周，也就是说，如果 x 遍及由 $-\pi$ 到 $+\pi$ 的区间，则量 t 将遍及由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个值域，并且正好经过一次．（注意：点 S 本身对应着 $t=\pm\infty$）这里我们将圆 $u^2+v^2=1$ 上的一般点 (u,v)，通过参数 t 的有理函数 $u=\frac{1-t^2}{1+t^2}, v=\frac{2t}{1+t^2}$ 来表示．因此，这些公式定义了一个有理映射，这个映射将 t 一直线映射为 u,v 平面上的圆（顺便指出，这个映射类似于第 24 页上讲到的球极投影的二维情况）．圆的这种有理表示法的根据，显然是恒等式

$$(t^2-1)^2+(2t)^2=(t^2+1)^2.$$

十分奇妙的是，这个公式在数论中也很有意义，因为这个公式对于每一个整数 t 给出了**毕达哥拉斯整数** $a=t^2-1, b=2t$ 和 $c=t^2+1$，这些整数满足恒等式 $a^2+b^2=c^2$ 也就是说，它们决定了各边为可公度的直角三角形．例如，当 $t=2$ 时，我们得到熟知的一组边长

$a=3, b=4, c=5$. 当 $t=4$ 时，得到 $a=15, b=8, c=17$，等等. 同一个代数恒等式在不同的领域如封闭形式中的积分、几何学和数论中都有重要意义，这是值得注意的. 当然，也并不是偶然的. 以这样的方式将各种不同的领域联系起来，乃是现代数学的典型趋势，虽然上面举出的这个特殊例子可以追溯到古代.

类似地，我们可以将双曲函数

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \text{ 和 } \sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

表示为第三个量的有理函数. 最明显的方法是设 $e^x=\tau$，于是我们有

$$\cosh x=\frac{1}{2}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right), \quad \sinh x=\frac{1}{2}\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right),$$

这就是 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 的有理表达式. 这时，$\dfrac{dx}{d\tau}=\dfrac{1}{\tau}$ 也是 τ 的有理函数. 然而，如果引入量 $t=\tanh\dfrac{x}{2}=\dfrac{\tau-1}{\tau+1}$，我们就得到同三角函数十分类似的情况；这时，我们得到公式

$$\cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \sinh x=\frac{2t}{1-t^2}$$

将 $t=\tanh\dfrac{x}{2}$ 微分，像第 326 页式 (82) 那样，我们得到导数 $\dfrac{dx}{dt}$ 的有理表达式

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1-t^2}$$

这里，量 t 的几何意义与讨论在三角函数时量 t 的几何意义也很相似，正如图 3.29 所示.

这里我们得到 u, v 平面上双曲线 $u^2-v^2=1$ 的有理表示法，即通过方程 $u=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}, v=\dfrac{2t}{1-t^2}$ 来表示. 曲线右面一支上的点是坐标为 $u=\cosh x, v=\sinh x$ 的点，这些点所对应的 t 值，其绝对值 $|t|<1$. 当 $|t|>1$ 时，则得到左面的一支.

现在我们来讨论几种函数的积分问题

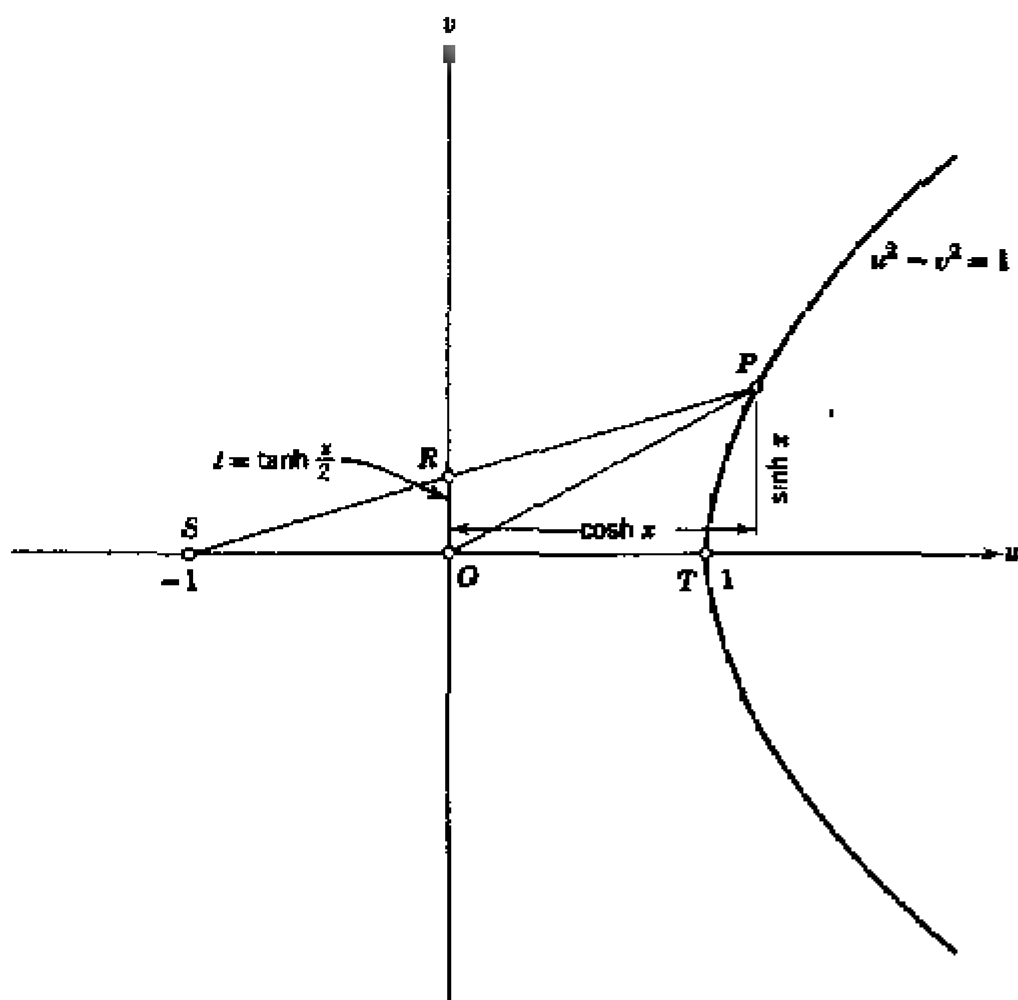


图 3.29　双曲函数的参数表示

*b. $R(\cos x, \sin x)$ 的积分法

设 $R(\cos x, \sin x)$ 表示两个函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理表达式，即由这两个函数和一些常数经过有理运算而构成的表达式，例如

$$\frac{3\sin^2 x + \cos x}{3\cos^2 x + \sin x}.$$

如果我们应用置换 $t = \tan \frac{x}{2}$，则积分

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

变为积分

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

现在在积分号下得到的是 t 的有理函数. 因此，在原则上我们已

经得到了这个表达式的积分. 因为可以根据上一节的方法来完成积分.

c. $R(\cosh x, \sinh x)$ 的积分法

同样, 如果 $R(\cosh x, \sinh x)$ 是双曲函数 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 的有理表达式, 我们就可以通过置换 $t = \tanh \dfrac{x}{2}$ 来求其积分. 注意到式 (83), 我们有

$$\int R(\cosh x, \sinh x)dx = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}dt.$$

(根据前面的说明, 我们也可引入 $\tau = e^x$ 作为新变量, 通过 τ 来表示 $\cosh x$ 和 $\sinh x$.) 这个积分又化为有理函数的积分.

d. $R(x, \sqrt{1-x^2})$ 的积分法

积分 $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, 可以通过置换

$$x = \cos u, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin u, \quad dx = -\sin u du$$

化为在 3.13 节 b 中处理过的那种类型; 然后, 应用置换 $t = \tan\dfrac{u}{2}$ 则化为有理函数的积分. 顺便指出, 如果应用置换

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2},$$

则只需一步而不是两步, 我们就能完成这种简化过程; 总之, 我们可以直接引入 $t = \tan\dfrac{u}{2}$ 作为新变量, 从而得到有理的被积函数.

e. $R(x, \sqrt{x^2-1})$ 的积分法

积分 $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, 可以经过置换 $x = \cosh u$, 变成在 3.13 节 c 中处理过的那种类型. 这里如果引入

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \tanh\frac{u}{2},$$

我们也可直接达到目的.

*f. $R(x, \sqrt{x^2+1})$ 的积分法

积分 $\int R(x, \sqrt{x^2+1})$, 可以经过置换 $x = \sinh u$ 化为在 3.13 节 c 中讨论过的那种类型 (第 330 页), 因此可以通过初等函数来积分. 如果不用置换 $e^u = \tau$ 或 $\frac{u}{2} = t$ 作进一步简化, 那么采用下列两种置换之一:

$$\tau = x + \sqrt{x^2+1}, \qquad t = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x},$$

就一步可得到有理函数的积分.

g. $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$ 的积分法

由 x 和 x 的任意二次多项式的平方根构成的有理表达式的积分 $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})dx$, 能够直接化为上面刚刚讨论过的类型之一. 我们写出 (见第 318 页)

$$ax^2+2bx+c = \frac{1}{a}(ax+b)^2 + \frac{ac-b^2}{a}$$

如果 $ac-b^2>0$, 我们借助于变换 $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$ 引入新变量 ξ, 于是根式成为

$$\sqrt{\frac{1}{a}(ac-b^2)(\xi^2+1)}$$

因此, 这个积分对 ξ 来说, 就是 3.13 节 f 的类型. 这里, 为了使平方根可以有实数值, 常数 a 必须为正.

如果 $ac-b^2=0$, 且 $a>0$, 则通过公式

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

我们看出被积函数本来就是 x 的有理函数.

最后，如果 $ac - b^2 < 0$，我们则设 $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2 - ac}}$，而得到根式的表达式 $\sqrt{\frac{1}{a}(ac - b^2)(\xi^2 - 1)}$．在 a 是正值时，积分化为 3.13 节 d 的类型；相反，在 a 是负值时，则将根式写成下列形式：

$$\sqrt{\frac{1}{(-a)}(b^2 - ac)(\xi^2 - 1)},$$

并可看到积分化为 3.13 节 e 的类型．

h．化为有理函数积分的其他例子

在可以化为有理函数来积分的其他类型的函数中，我们将简要地提到两种：（1）含有两个不同的线性函数平方根的有理式，即 $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})$；(2) 形如 $R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(\alpha x+\beta)})$ 的表达式，其中 a, b, α, β，均为常数．在第一种类型中，我们引入新变量 $\xi = \sqrt{\alpha x+\beta}$，因而有 $\alpha x+\beta = \xi^2$，于是得到

$$x = \frac{\xi^2 - \beta}{\alpha} \quad 和 \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{\alpha}.$$

这时

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})dx$$
$$= \int R\left\{\frac{\xi^2 - \beta}{\alpha}, \sqrt{\frac{1}{\alpha}[a\xi^2 - (a\beta - b\alpha)]}, \xi\right\}\frac{2\xi}{\alpha}d\xi.$$

这是 3.13 节 g 中讨论过的类型．

在第二种类型中，如果我们引入新变量

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}},$$

则有

$$\xi^n = \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}, \quad x = -\frac{\beta\xi^n - b}{\alpha\xi^n - a}, \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha\xi^n - a)^2}n\xi^{n-1},$$

并且直接得到公式

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right) dx = \int R\left(\frac{-\beta\xi^n + b}{\alpha\xi^n - a}, \xi\right) \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha\xi^n - a)^2} n\xi^{n-1} d\xi,$$

这是有理函数的积分.

i. 注记

上面的讨论主要的意义是在理论上. 在实际处理中, 这些复杂的表达式将会使得计算十分累赘. 所以, 在可能的情况下, 利用被积函数的特殊形式以减轻工作量才是适宜的. 例如, 为了积分 $1/(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)$, 最好利用置换 $t = \tan x$, 而不去用第 329 页上给出的置换; 因为 $\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$ 能够通过 $\tan x$ 表示为有理函数, 所以没有必要返回到 $t = \tan\frac{x}{2}$. 对于由 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 和 $\sin x\cos x$[1] 经过有理运算而组成的每一个表达式, 情况都是这样. 此外, 在计算许多积分时, 宁可采用三角形式而不采用有理形式, 如果三角形式能够通过某种简单的递推法来计算的话. 例如, 虽然

$$\int x^n(\sqrt{1-x^2})^m dx$$

中的被积函数能够化为有理形式, 还是最好令 $x = \sin u$, 将积分化为 $\int \sin^n u\cos^{m+1} u du$ 的形式, 因为这种形式很容易用第 312 页上的递推法来处理 (或者利用加法定理将正弦和余弦的幂化为倍角的正弦和余弦).

为了计算积分

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} \quad (a^2 + b^2 > 0),$$

我们不用一般理论, 而是记

$$A = \sqrt{a^2+b^2}, \sin\theta = \frac{a}{A}, \cos\theta = \frac{b}{A}.$$

1) 因为 $\sin x\cos x = \tan x\cos^2 x$ 能够通过 $\tan x$ 以有理形式来表示

这时，积分变成下列形式：

$$\frac{1}{A}\int \frac{dx}{\sin(x+\theta)},$$

引入新变量 $x-\theta$，我们求得 [见第 305 页式 (40)]，积分之值为

$$\frac{1}{A}\log\left|\tan\frac{x+\theta}{2}\right|.$$

第三部分 积分学的进一步发展

3.14 初等函数的积分

a. 用积分定义的函数. 椭圆积分和椭圆函数

我们已经给出了能够化为有理函数进行积分的多种类型的函数. 由此实际上已详尽地列出了可用初等函数来积分的函数. 而企图用初等函数来表示出如 (当 $n>2$ 时)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}},$$

$$\int \sqrt{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}\,dx$$

或

$$\int \frac{e^x}{x}dx$$

这样的不定积分的各种努力都失败了；在 19 世纪，终于证明了通过初等函数来表达这些积分实际上是不可能的.

所以，如果积分学的目标是以显式来积分函数的话，我们就肯定会遇到障碍. 然而，对于积分学的这种限制本来就不是合理的，而是人为的. 我们知道，每一个连续函数的积分作为极限**是存在的**

，并且本身还是积分上限变量的连续函数，而不论积分是否能通过初等函数来表示. 初等函数的显著特点在于：这些函数的性质很容易认识，并且通过方便的数表很容易将它们应用于各种数值问题，或者容易地将它们计算出来，并达到任意的精确度.

当一个函数的积分不能通过我们已经熟悉的函数来表示时，我们不妨引入这个积分作为一个新的“高等的”函数. 实际上这不过是给积分加上一个名称而已. 引入这样一个新函数究竟是否方便，取决于它所具有的性质，以及它在理论和应用中是否经常出现和是否易于演算. 在这种意义上，积分过程乃是产生新函数的一般原则.

我们在研究初等函数时就已经熟悉这个原理. 我们曾不得不引入 $\frac{1}{x}$ 的积分作为一个新函数，称之为对数函数，并且不难推导出这个函数的各种性质. 我们也能按同样的方式，仅仅利用有理函数、积分过程和求反函数的过程来引入三角函数. 为此，我们只需分别取方程

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

或

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

作为函数 $\arctan x$ 或 $\arcsin x$ 的**定义**，然后通过求反函数得到三角函数. 用这种方式来定义三角函数，没有涉及直观的几何性质(特别是没有涉及“角”的直观概念)；而剩下的任务是与几何无关地来推导这些函数的性质[1]. (以后，在 3.16 节中我们将用另一种方式对三角函数进行纯分析的讨论.)

***椭圆积分**

超出初等函数范围的第一个重要例子是**椭圆积分**. 椭圆积分是这样一些积分，其中被积函数是三次或四次多项式的平方根的有

---

1) 我们在这里不再来推导三角函数的性质. 其中最本质的一步是证明反函数即正弦函数和正切函数的加法定理.

理函数. 在这些积分之中, 特别重要的又是函数

$$u(s)=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

其反函数 $s(u)$ 同样起着特别重要的作用 [1]. 函数 $s(u)$ 已经像初等函数那样被充分地研究过并已编制成表 [2]

这样的函数是所谓**椭圆函数**的典型情况, 椭圆函数在复变函数论中占有中心位置, 并且在许多物理应用中都会出现 (例如, 在单摆运动的研究中, 见第四章, 4 7 节 d)

在求椭圆弧长的问题中就会出现这类积分 (见第四章, 4 2 节 c). 这正是 "椭圆积分" 这一名称的由来.

我们还要指出, 在一些初看起来形式很不同的积分中, 只要经过简单的置换以后, 都能化成椭圆积分. 例如, 积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos\alpha-\sin x}},$$

经过置换 $u=\cos\dfrac{x}{2}$, 化为积分

$$-k\sqrt{2}\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\quad k=\frac{1}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)},$$

积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}},$$

经过置换 $u=\sin x$, 变为

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}}.$$

最后, 积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$

---

1) 对于特殊的值 $k=0$, 我们分别得到 $u(s)=\arcsin x$ 和 $s(u)=\sin u$

2) 函数 $s(u)$ 是所谓**雅可比** (Jacobi) **椭圆函数**之一, 通常用符号 $\mathrm{sn}(u)$ 来表示, 这是为了表示它是普通正弦 (sine) 函数的推广

经过置换 $u=\sin x$, 变成

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

b. 关于微分和积分

在这里，我们再来讨论一下微分和积分之间的关系. 微分可以看作是比积分更初等一些的方法，因为微分不会使我们超出"已知"函数的范围. 但是，另一方面，我们必须记住，任意连续函数的可微性决不是必然结论，而是一个严格的假设. 因为我们已经看到，存在着一些连续函数，它们在某些孤立点上是不可微的，而事实上自从维尔斯特拉斯以来，就已经构造出许多处处不可微的连续函数的例子[1]. 相反，虽然通过初等函数来给出积分并不总是可能的，但是至少我们可以确信连续函数的积分是存在的.

总之，不能将微分和积分简单地进行对比，而说哪一个是较初等的运算哪一个是较高等的运算; 从某些观点看来，前者应认为是较初等的运算，而从另一些观点看来，后者应认为是较初等的运算.

就积分概念而言，在下一节中，我们将放弃被积函数是处处连续的这一假设. 这样我们将会看到，积分的概念可以推广到各种间断函数的情形中去.

3.15 积分概念的推广

a. 引言. 反常积分的定义

在第二章中 (第 139 页), 我们曾把区间 $[a,b]$ 划分成 n 个长度为 Δx_i 的子区间，并在这些子区间上选取中间点 ξ_i, 对函数 $f(x)$ 建立了"黎曼和"

$$F_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

1) 见 E.C. 梯其玛希，函数论，11.21—11.23 节，科学出版社，1964.

如果对于任何分划序列和任何中间点，当 Δx_i 的最大值趋向于零时，序列 F_n 趋向于同一的极限 F_a^b. 我们就将积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为这个极限 F_a^b. 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，我们曾经证明这个极限存在．然而，当 $f(x)$ 不是在闭区间 I 上的一切点上都有定义或连续时，或者当积分区间伸向无穷远时，我们也常常需要定义一种积分．例如，我们希望赋予像

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad 或 \quad \int_0^1 \sin\frac{1}{x}dx$$
$$\int_0^\infty e^{-x}dx \quad 或 \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$$

等等这样一些表达式以适当的意义．

首先我们将积分的概念推广到下述情况：被积函数在开区间 (a,b) 内是连续的，而在区间的端点不一定有定义或不一定是连续的．显然，对于满足 $a<\alpha<\beta<b$ 的任何数 α,β, 普通的（"正常的"）积分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 有定义．现在，如果当 $a<\alpha_\varepsilon<\beta_\varepsilon<b$ 和 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\alpha_\varepsilon=a, \lim\limits_{\varepsilon\to0}\beta_\varepsilon=b$ 时，

$$F=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} f(x)dx$$

存在，并且 F 与 α_ε 和 β_ε 的特定选择无关，我们就说，反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，并且具有值 F.

逐段连续的被积函数　如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内除有限个中间点 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 以外有定义，并且 $f(x)$ 在每一个开区间 (a,c_1)、(c_1,c_2), $\cdots$, (c_n,b) 内是连续的，我们则将 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为在这些子区间上的反常积分之和，如果每一个反常积分都收敛的话.

当 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续并且**有界**时，反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 总是收敛的．例如，积分

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 \sin\frac{1}{x}dx$$

是收敛的. 为了证明上述一般命题, 为简单起见, 我们可以假设 f 在点 b 是连续的, 而在点 a 则不一定连续. 这时, 根据定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a} F(\alpha),$$

其中 $F(\alpha)(a < \alpha < b)$ 定义为 $\int_\alpha^b f(x)dx$. 如果 M 是 $|f|$ 的上界, α_n 是趋向于 a 的序列, 则根据积分中值定理, 我们有 $|F(\alpha_n) - F(\alpha_m)| \le M|\alpha_n - \alpha_m|$; 因此, 由哥西收敛准则可知 $\lim_{\alpha \to a} F(\alpha)$ 存在.

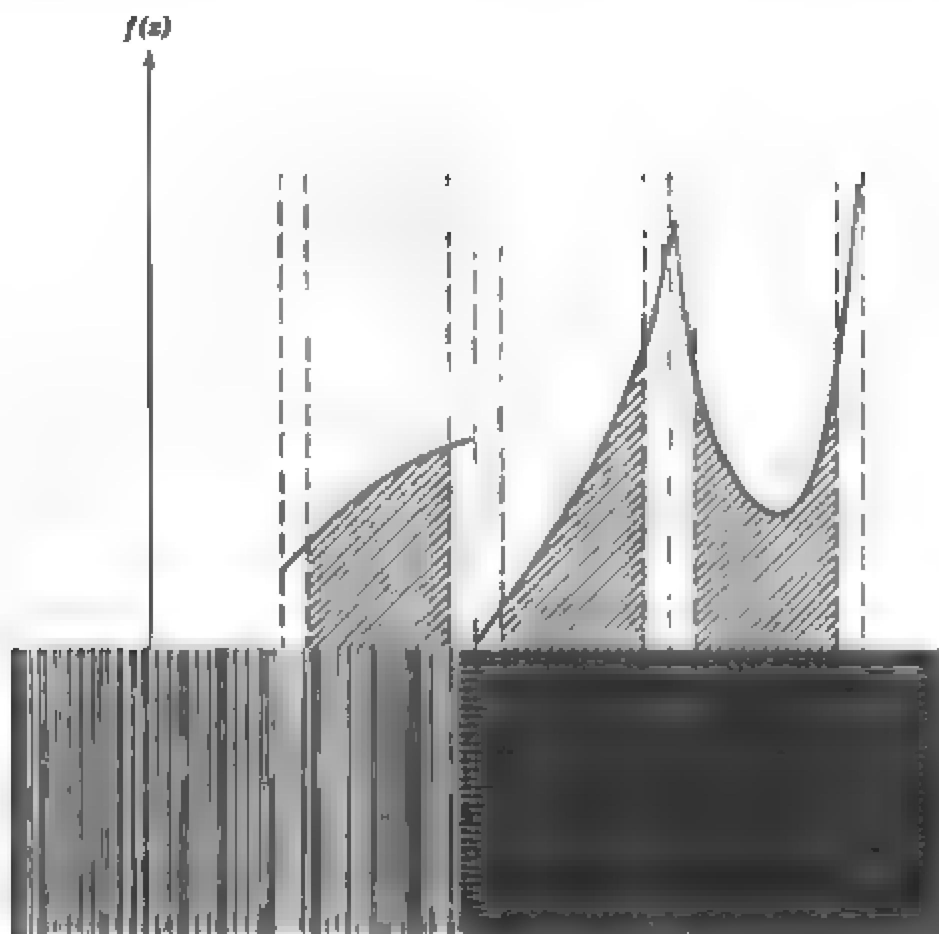


图 3.30　具有间断点的函数的积分

事实上, 当 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续并有界时, 我们可以在端点 a,b 上为 f 规定任何值, 因而也可以作为黎曼和的极限确定为 "正常" 积分而直接得到 $\int_a^b f(x)dx$. 不难看出, 对于连续的有界的 f, 两个定义都适用, 并且会得到同样的值, 而与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的选择

无关. 更一般地说, 对于在 (a,b) 内除有限个点以外都有定义并且连续的有界函数, 也有同样的结论. 特别是, 当除了有限个跳跃性间断点以外 f 为连续时, $\int_a^b f(x)dx$ 总是存在. 总之, 为了判断在有限区间上函数的反常积分的收敛性, 我们需要注意的只是 f 成为无穷大的情况.

我们指出, 在几何上也可以将反常积分解释为曲线下的面积, 并与连续函数 f 的情况相同 (图 3.30).

(反常积分也称为广义积分 —— 译者注.)

b. 无穷间断的函数

我们首先考虑积分

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},$$

其中 α 是正数. 显然, 当 $x \to 0$ 时, 被积函数 $\frac{1}{x^\alpha}$ 变为无穷大. 所以我们必须这样来定义积分 J: 首先作出从正的下限 ε 到上限 1 的积分 J_ε, 然后令 ε 趋向于零. 按照积分的基本法则, 如果 $\alpha \neq 1$, 我们得到

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}).$$

由此立即看出存在下述几种可能的情况: (1) α 大于 1; 这时, 如果 $\varepsilon \to 0$, 则右端趋向于无穷大; (2) α 小于 1; 这时, 右端趋向于极限 $\frac{1}{1-\alpha}$. 所以, 在第二种情况下, 我们就将这个极限值取作为积分 $J = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. 在第一种情况下, 我们就说从 0 到 1 的积分不存在或者是**发散的**. (3) 在第三种情况下, $\alpha = 1$, 这个积分等于 $-\log\varepsilon$, 所以当 $\varepsilon \to 0$ 时, 不存在极限, 而是趋向于无穷大; 即积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x} = J$ 不存在或者是发散的.

被积函数具有无穷间断点的第二个例子是 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. 我

们知道

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon).$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，右端收敛于极限 $\frac{\pi}{2}$，所以，这就是积分之值：

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

虽然在点 $x = 1$ 处被积函数变为无穷大.

c. 作为面积的解释

将反常积分解释为面积，其方法如下：把一个有界区域通过极限伸向无穷远时区域所确定的极限面积. 例如对函数 $\frac{1}{x^\alpha}$，上述讨论表明：如果 $\alpha < 1$，由 x 轴、直线 $x = 1$、直线 $x = \varepsilon$ 和曲线 $y = \frac{1}{x^\alpha}$ 所围成的面积，$\varepsilon \to 0$ 时趋向于有限的极限，如果 $\alpha \geq 1$，则趋向于无穷大. 这个事实也可以简单地叙述如下：界于 x 轴、y 轴、曲线 $y = \frac{1}{x^\alpha}$ 和直线 $x = 1$ 之间的面积是有限的还是无限的，取决于 $\alpha < 1$ 还是 $\alpha > 1$.

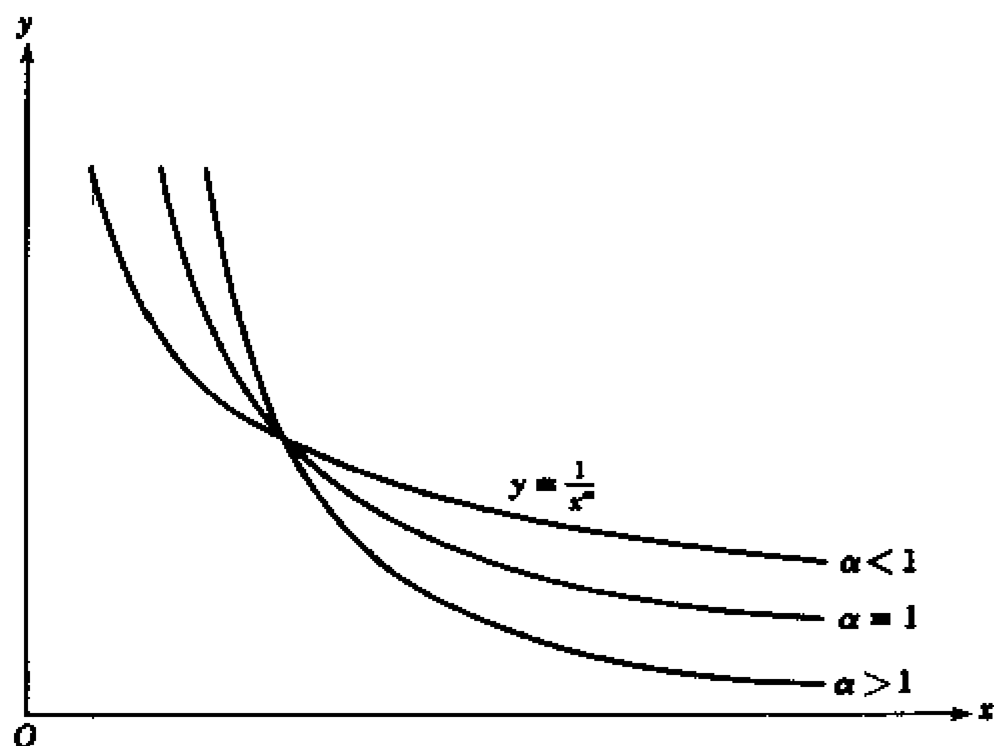


图 3.31　广义积分的收敛和发散图示

当然，从直观上我们不能确切地知道伸向无穷远的区域的面积是有限的还是无限的，例如图 3.31 表明：当 $\alpha < 1$ 时，曲线下的面积保持为有限值，而当 $\alpha > 1$ 时，曲线下的面积是无限的，这些事实从几何直观当然是想象不到的.

d. 收敛判别法

为了检验在点 $x = b$ 具有无穷间断的函数 $f(x)$ 的积分是否收敛，我们经常使用下述判别法.

设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < b$ 上是连续的，并且 $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. 这时，如果存在小于 1 的正数 μ 和与 x 无关的常数 M，使得不等式 $|f(x)| \leq \dfrac{M}{(b-x)^{\mu}}$ 在区间 $a \leq x < b$ 上处处成立，换句话说，**如果 $f(x)$ 在点 $x = b$ 是低于一阶的无穷大**：对于某一个 $\mu < 1$，有 $f(x) = o\left[\dfrac{1}{(b-x)^{\mu}}\right]$，则**积分** $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**. 相反，如果存在数 $\nu \geq 1$ 和固定的数 N，使得不等式 $f(x) \geq \dfrac{N}{(b-x)^{\nu}}$ 在区间 $a < x < b$ 上处处成立，换句话说，**如果正值函数 $f(x)$ 在点 $x = b$ 至少是一阶的无穷大，则积分发散**.

只要与刚刚讨论过的简单情形相比较，我们立即可得到证明. 对第一部分，我们注意到：在 $0 < \varepsilon < b - a$ 时，我们有

$$0 \leq \frac{M}{(b-x)^{\mu}} + f(x) \leq \frac{2M}{(b-x)^{\mu}},$$

及

$$0 < \int_a^{b-\varepsilon} \left[\frac{M}{(b-x)^{\mu}} + f(x)\right] dx < \int_a^{b-\varepsilon} \frac{2M}{(b-x)^{\mu}} dx.$$

通过变为积分 $\int \dfrac{dx}{x^{\mu}}$ 的简单的置换，即用 $b - x$ 代替 x，便得到上式右端的积分，当 $\varepsilon \to 0$ 时，右端的积分有极限，因此保持有界. 而且，当 $\varepsilon \to 0$ 时，上式之中间项的积分值是单调增加的，且由于

这些积分是有界的，所以它们必定具有极限. 积分

$$\int_a^b \left(\frac{M}{(b-x)^\mu} dx + f(x) \right) dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^\mu} dx + \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \right)$$

是收敛的. 于是，由 $\frac{M}{(b-x)^\mu}$ 的积分的收敛性便可推出 $\int_a^b f(x)dx$ 的收敛性.

定理第二部分的证明，留给读者当作练习.

同时我们也可以看出，当积分的**下限**是无穷间断点时，上述定理也同样成立. 如果无穷间断点处于积分区间的内部，我们只需用这个点将积分区间分成两个子区间，然后对每一个子区间分别进行讨论.

作为一个例子，我们考虑椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (k^2 < 1).$$

由恒等式 $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$，我们立即看出：当 $x \to 1$ 时，被积函数只是 1/2 阶的无穷大，因此可知这个瑕积分是收敛的. (当 $k = 1$ 时，积分是发散的.)

e. 无穷区间上的积分

积分概念的另一重要推广是考虑积分区间为无穷的情况. 为了用公式准确地来表示，我们引入下列表示法：如果积分

$$\int_a^A f(x)dx$$

(其中 a 为固定的数) 当 $A \to \infty$ 时趋向于确定的极限，则我们定义 $f(x)$ 在无限区间 $x > a$ 上的积分为

$$\lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

而且，称这样的积分为**收敛的**.

例 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ 仍然可以作为讨论各种可能情况的简单例子. 这时，除去 $\alpha=1$ 的情况，有

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha}-1).$$

于是我们看出. 如果 $\alpha>1$, 则当 $A\to\infty$ 时积分存在，事实上就是

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1};$$

而当 $\alpha<1$ 时，则积分不再存在. 对于 $\alpha=1$ 的情况，积分显然也是不存在的，因为当 x 趋向于无穷大时 $\log x$ 趋向于无穷大，所以我们可以看出，函数 $\dfrac{1}{x^\alpha}$ 在无限区间上进行积分时的收敛情形，不同于坐标原点附近的积分，看一下图 3.31，这个命题也是清楚的. 因为显然，α 越大，当 $x\to\infty$ 时，曲线画得越靠近 x 轴. 因此，对于充分大的 α 值，我们所考虑的面积趋向于确定的极限.

我们还常常利用下述准则，去判别积分限为无穷时的积分是否存在.（这里仍然假设，对于充分大的 x 值，譬如说当 $x\geq a$ 时，被积函数是连续的.）

收敛判别法

积分 $\int_0^\infty f(x)dx$ **是收敛的，如果当** $x\to\infty$ **时函数** $f(x)$ **是高于一阶的无穷小**，也就是说，如果存在数 $\nu>1$, 使得对于一切足够大的 x 值，关系式 $|f(x)|<\dfrac{M}{x^\nu}$ 成立，其中 M 是与 x 无关的常数. 用符号来表示，即 $f(x)=O\left(\dfrac{1}{x^\nu}\right)$. 相反，**这个积分是发散的，如果函数** $f(x)$ **是正的，并且当** $x\to\infty$ **时** $f(x)$ **是不高于一阶的无穷小**，也就是说，存在常数 $N>0$，使得 $xf(x)\geq N$.

判别法的证明同以前的论证完全一样，因而可以留给读者.

积分 $\int_a^{\infty}\frac{1}{x^2}dx(a>0)$ 是一个非常简单的例子. 当 $x\to\infty$ 时,被积函数是二阶无穷小. 我们立即可以看出这个积分是收敛的, 因为 $\int_a^{A}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{A}$, 所以

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{a}.$$

另一个同样简单的例子是

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to\infty}(\arctan A-\arctan 0)=\frac{\pi}{2}.$$

这时, 因为被积函数是偶函数, 所以显然还有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$$

奇妙的是, 曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 同 x 轴之间 (伸向无穷远的) 面积 (见图 3.8, 第 242 页) 原来等于单位圆内面积.

f. Γ (伽玛) 函数

数学分析中另一个特别重要的积分是所谓 Γ 函数

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n-1}dx\quad(n>0).$$

将积分区间分成两部分, 一部分从 $x=0$ 到 $x=1$, 另一部分从 $x=1$ 到 $x=\infty$. 我们可以看出: 在第一部分上的积分显然是收敛的, 因为 $0<e^{-x}x^{n-1}<\frac{1}{x^{\mu}}$, 其中 $\mu=1-n<1$. 对于在无限的第二部分 (无穷区间) 上的积分来说, 收敛性准则也是满足的; 例如, 取 $\nu=2$. 我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}x^{n-1}=0$, 因为当 $x\to\infty$ 时指数函数 e^{-x} 是比任何幂 $\frac{1}{x^m}(m>0)$ 都更高阶的无穷小 (见第 284 页). 如果我们把 Γ 函数看作是数 n (不一定是整数) 的函数, 则这个函数满足由分部积分得到的下列重要关系式. 首先, 我们有 (取

$f(x)=x^{n-1}, g'(x)=e^{-x}$，

$$\int e^{-x}x^{n-1}dx=-e^{-x}x^{n-1}+(n-1)\int e^{-x}x^{n-2}dx.$$

如果我们在 0 和 A 之间取成定积分关系式，然后令 A 趋向于无穷大，则立即得到

$$\Gamma(n)=(n-1)\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n-2}dx=(n-1)\Gamma(n-1),\quad \text{当} n>1 \text{时},$$

根据这个递推公式，如果 μ 是整数，并且 $0<\mu<n$，则可推出

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots(n-\mu)\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n-\mu-1}dx.$$

特别是，如果 n 是正整数，当 $\mu=n-1$ 时，我们有

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1\int_0^{\infty}e^{-x}dx,$$

又因为

$$\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1,$$

最后得到

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=(n-1)!.$$

这是用积分来表示阶乘的一个很有用的表达式.

另一个例子，积分

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx,\quad \int_0^{\infty}x^ne^{-x^2}dx$$

都是收敛的，这一点由收敛性判别法不难推出. 通过置换 $x^2=u, dx=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$ 便可看出，前一个积分等于 $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$，后一个积分等于 $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$，当 $n>-\frac{1}{2}$ 时.

g. 狄利克雷 (Dirichlet) 积分

在许多应用中我们遇到一些积分，它们的收敛性不能直接由上面所讲的收敛判别法来判断. 积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

便是一个重要的例子(狄利克雷曾研究过这个积分). 如果上限不是无限的而是有限的，则这个积分是收敛的，因为对于一切有限的 x，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 是连续的(当 $x=0$ 时，这个函数由 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 给出). 积分 I 之所以收敛，是由于被积函的符号周期地变化，使得长度为 π 的相邻区间对积分的贡献几乎彼此相消(图 3.32). 于是，如

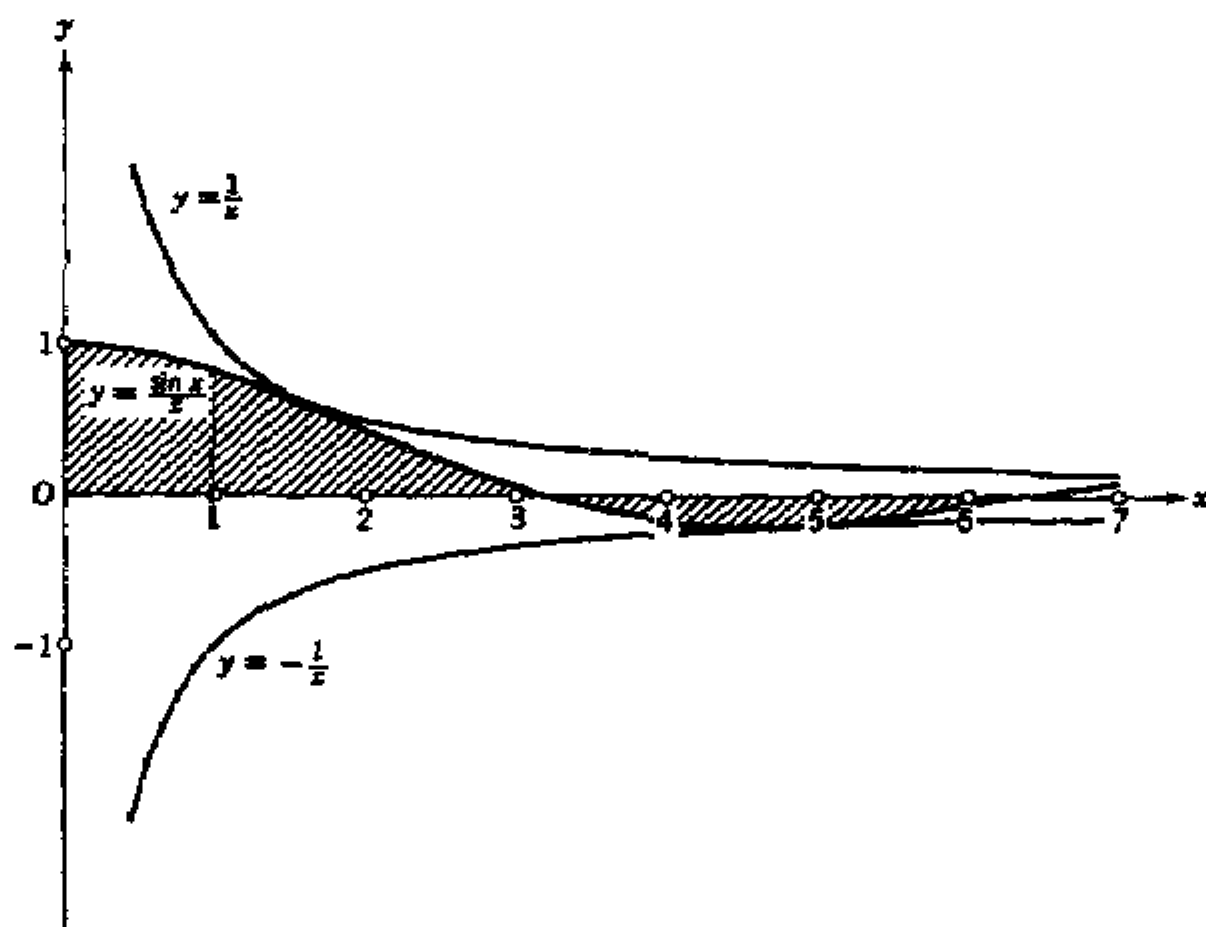


图 3.32　$y=\frac{\sin x}{x}$ 的图形

果我们认定 x 轴上方的面积是正的，x 轴下方的面积是负的，则 x 轴和曲线 $y=\frac{\sin x}{x}$ 之间的无穷多个面积之和是收敛的. (相反，

不难证明，切面积的数值和，即积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

是发散的.）

由于函数 $\sin x$ 的符号周期地变化，造成了下述事实：函数 $\sin x$ 的不定积分

$$\int \sin x dx = 1 - \cos x$$

在 $[0,\infty)$ 上都是有界的．我们利用这个事实来考察表达式

$$I_{AB} = \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx = \int_A^B \frac{1}{x} \frac{d(1-\cos x)}{dx} dx.$$

分部积分后得到

$$I_{AB} = \frac{1-\cos B}{B} - \frac{1-\cos A}{A} + \int_A^B \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

因此

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{A\to 0 \\ B\to +\infty}} I_{AB} = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx,$$

其中，右端的积分显然是收敛的．换句话说，积分 I 存在．在 8.4 节 c 中我们将要进一步来证明一个重要事实，即 I 的值是 $\frac{\pi}{2}$.

h. 变量置换．菲涅耳 (Fresnel) 积分

显然，对于收敛的反常积分来说，所有的换元法则，仍然有效．因此，经过变量置换，常常可以得到一些不同的、比较容易处理的积分表达式．

例如，为了计算

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx,$$

我们引入新变量 $u = x^2$，从而得到

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u} du = \lim_{A\to +\infty} \frac{1}{2}(1-e^{-A}) = \frac{1}{2}.$$

在研究反常积分时出现的另一个例子是**非涅耳积分**(这个积分是在光的衍射理论中出现的)

$$F_1 = \int_0^\infty \sin(x^2)dx, \quad F_2 = \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

经过置换 $x^2 = u$, 得到

$$F_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du, F_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}du.$$

分部积分后，我们得到

$$\int_A^B \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du = \frac{1-\cos B}{\sqrt{B}} - \frac{1-\cos A}{\sqrt{A}} + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{1-\cos u}{u^{3/2}}du.$$

当 A 和 B 分别趋向于零和趋向于无穷大时，通过与狄利克雷积分所作的同样的论证，我们可以看出积分 F_1 是收敛的. 按完全相同的方式，还可以证明积分 F_2 的收敛性.

这些非涅耳积分说明，即使当 $x \to \infty$ 时被积函数不趋向于零, 反常积分也可能存在. 事实上, 甚至当被积函数是无界的时候, 反常积分也可能存在，正如积分

$$\int_0^\infty 2u\cos(u^4)du$$

所表明的那样. 当 $u^4 = n\pi$ 时，即当 $u = \sqrt[4]{n\pi}$ 时 $(n = 0,1,2,\cdots)$, 被积函数变成 $2\sqrt[4]{n\pi}\cos n\pi = \pm 2\sqrt[4]{n\pi}$, 于是被积函数是无界的. 然而，经过置换 $u^2 = x$, 积分化为

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx,$$

这个刚刚证明过的积分，是收敛的.

借助于变量置换，反常积分常常可以转化为正常积分. 例如，经过置换 $x = \sin u$, 有

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2}.$$

反过来，连续函数的积分也可以转化为反常积分；如果所采用的置换 $u=\varphi(x)$，使得在积分区间的端点上导数 $\varphi'(x)=0$，因而 $\frac{dx}{du}$ 是无限的，就会出现这种情况.

3.16 三角函数的微分方程

a. 关于微分方程的初步说明

积分不过是进入一个极其广泛的数学领域的第一步：我们知道，用积分可以进行微分的逆运算，即由方程 $y'=f(x)$ 解出 $y=F(x)$，其中 $f(x)$ 是已知函数，但是现在更进一步，要求在满足 y 和 y' 之间更为一般的关系式中去求出函数 $y=F(x)$. 这样的"微分方程"不仅在严格的理论工作中，而且在各种应用中处处都会出现. 对于微分方程已做出了许多深入的研究，它们远远超出了本书的范围. 我们将在本卷最后和第二卷中介绍微分方程理论的某些基本方面的内容. 在本节，我们仅限于考虑一个非常简单但很重要的例子，就是讨论在第 192 页上已经提到过的关于函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的微分方程.

虽然在初等三角学中，我们是从几何观点得到这些函数以及它们的性质的，但是现在，我们不再依靠几何直观，而用简单的方式把三角函数置于一个严格的分析基础之上，这同前面所说的数学发展的一般趋势是一致的.

b. 由微分方程和初始条件定义的 $\sin x$ 和 $\cos x$

考虑微分方程

$$u''+u=0,$$

我们的目标是要刻画出解 $u(x)$ 的特性，从而验证这些解就是正弦函数和余弦函数. 任一函数 $u=F(x)$ 如果满足方程，也就是说，有 $F''(x)+F(x)=0$，则称 $F(x)$ 为该方程的解[1].

1 当然，我们总是认为所考虑的函数都是充分可微的

我们立即可以看出，如果 $u=F(x)$ 是解，则函数 $u=F(x+h)$ 也是解，其中 h 是任意常数，这一点通过将 $F(x+h)$ 对 x 微分两次即可证实. 同样可以立即看出，如果 $F(x)$ 是解，则导数 $F'(x)=u$ 也是解，当然 $cF(x)$ 也是解，其中 c 为常数因子. 此外，如果 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是解，则任一线性组合 $c_1F_1(x)+c_2F_2(x)=F(x)$ 也是解，其中 c_1 和 c_2 都是常数.

为了从微分方程的许多解中选出一个特定的解，我们加上“初始条件”，即要求当 $x=0$ 时 $u=F(0)$ 和 $u'=F'(0)$ 分别取值 a 和 b. 我们首先指出：**这些初始条件唯一地确定了方程的解**.

为了证明，我们来推出一个任何解 u 都应满足的一般式子. 将微分方程乘以 $2u'$. 由于 $2u''u'=(u'^2)'$ 和 $2u'u=(u^2)'$，我们得到方程

$$0=2u''u'+2u'u=[(u')^2+u^2]'.$$

这个方程立即可以积分，并且是

$$u'^2+u^2=c,$$

其中 c 是不依赖于 x 的常数，所以 c 必须与左端取 $x=0$ 时之值相同. 因此，对于任何解 u，我们都有

$$u'^2(0)+u^2(0)=c.$$

现在，假设存在着满足同样初始条件的两个解 u_1 和 u_2. 那么，差 $z=u_1-u_2$ 也是解，并且 $z'(0)=z(0)=0$. 因此我们推出 $c=0$，并且对于一切 x，有 $z'^2+z^2=0$，这就意味着 $z=0$ 和 $z'=0$，从而上述命题得证.

其次我们将函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 定义为微分方程 $u''(x)+u(x)=0$ 的解，其中要满足的初始条件分别是：对于 $u=\sin x$，

$$u(0)=a=0,\quad u'(0)=b=1,$$

而对于 $u=\cos x$，

$$u(0)=a=1,\quad u'(0)=b=0$$

这里我们先承认下述事实：这样的解存在，并且总是任意次可微的，其证明在后面将从更一般的角度给出 (见 9.2 节)[1].

这时，函数 $u=a\cos x+b\sin x$ 是满足方程 $u''+u=0$ 和初始条件：当 $x=0$ 时 $u=a, u'=b$ 的唯一的解. 这就证明上述微分方程的每一个解都是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的线性组合.

现在我们来用微分方程 $u''+u=0$ 讨论三角函数，例如函数 $u=\sin x$, 从而求出这些函数的基本性质. 显然，如果 u 是解，则 $v=u'$ 也是解： $v''+v=0$. 由于 $u''+u=v'+u=0$, 所以我们有 $v'(0)=-u(0)=0$, 而 $v(0)=u'(0)=1$. 因此

$$v(x)=\cos x=\frac{d}{dx}\sin x$$

类似地，我们可以推出 $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$.

我们知道加法定理

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

在三角学中处于中心位置. 现在, 这个定理可按上述方法直接推出：首先, 函数 $\cos(x+y)$ 作为 x 的函数 (其中 y 暂且固定不变) 是微分方程 $u''+u=0$ 的解, 它满足在 $x=0$ 时的初始条件 $u(0)=\cos y(=a)$ 和 $u'(0)=-\sin y(=b)$. 现在，正如刚刚证明过的那样，满足初始条件 $u(0)=a$ 和 $u'(0)=b$ 的解 (根据前面的命题可知，为唯一解) 是 $a\cos x+b\sin x$. 因此，对于解 $\cos(x+y)$, 立即得到表达式

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

这正是我们所要证明的.

本节的这些讨论足以说明怎样才能以纯分析的方式与几何无关地引入三角函数.

---

1) 顺便指出，我们可以直接从方程 $u'^2+u^2=1$ 推出这些事实，这个方程对于 $\sin x$ 以及 $\cos x$ 都成立，而且由其等价的形式 $\frac{dx}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 经过积分即可得到 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的反函数.

我们指出下列结果而不进行详细讨论：

数 $\frac{1}{2}\pi$ 现在可以定义为满足 $\cos x = 0$ 的最小的正 x 值；

三角函数的周期性也是不难由分析方法导出的.

以后我们在研究无穷幂级数时还要来考虑三角函数的分析结构 (见 5.5 节 b)

问　　题

3.1 节，第 227 页

1. 设 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

(a) 试由下列方程确定多项式 $F(x)$：

$$F(x) - F'(x) = P(x);$$

(b) 试由下列方程确定 $F(x)$：

$$c_0F(x) + c_1F'(x) + c_2F''(x) = P(x).$$

2. 试求 $\frac{1}{x}$ 在点 $x = 2$ 的 n 阶导数的绝对值当 $n \to \infty$ 时的极限.

3. 试证明：如果对于一切 x 有 $f^{(n)}(x) = 0$，则 f 是一个次数最高为 $n-1$ 的多项式，反之亦然.

4. 试确定有理函数 $r(x)$ 的形式，如果 $r(x)$ 满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0.$$

5. 试用数学归纳法证明：乘积的 n 阶导数可按下列法则 (莱布尼兹法则) 求得：

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = f\frac{d^ng}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\frac{dg}{dx} + \frac{d^nf}{dx^n}g$$

这里 $\binom{n}{1}=n, \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2!}$, 等等表示二项式系数.

6. 试证明: $\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1}=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$.

3.2 节, 第 233 页

1. 设 $y=e^x(a\sin x+b\cos x)$. 试证明: y'' 可以表示为 y 和 y' 的线性组合, 即

$$y''=py'+qy,$$

其中 p 和 q 是常数. 试将一切高阶导数表示为 y' 和 y 的线性组合.

*2. 试求 arc $\sin x$ 的 n 阶导数在 $x=0$ 之值, 然后求 $(\text{arc}\sin x)^2$ 的 n 阶导数在 $x=0$ 之值.

3.3 节, 第 244 页

1. 试求 $f[g\{h(x)\}]$ 的二阶导数.

2. 试微分函数 $\log_{v(x)}u(x)$[即以 $v(x)$ 为底的 $u(x)$ 的对数; $v(x)>0$]

3. 为了使函数

$$\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

处处具有有限的且不为零的导数, 试问系数 α,β,a,b,c 必须满足怎样的条件?

4. 试证明: $\frac{d^n(e^{x^2/2})}{dx^n}=u_n(x)e^{x^2/2}$, 其中 $u_n(x)$ 是 n 次多项式. 试建立递推关系式

$$u_{n+1}=xu_n+u_n'.$$

*5. 试将莱布尼兹法则应用于

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2/2})=xe^{x^2/2},$$

导出递推关系式

$$u_{n+1} = xu_n + nu_{n-1}.$$

*6 试将问题 4 和 5 的递推关系式合并起来，导出 $u_n(x)$ 满足的微分方程:

$$u_n'' + xu_n' - nu_n = 0.$$

7. 试求微分方程 $u_n'' + xu_n' - nu_n = 0$ 的多项式的解

$$u_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

*8. 如果 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, 试证明下列关系式:

(a) $P_{n+1}' = \dfrac{x^2-1}{2(n+1)}P_n'' + \dfrac{(n+2)x}{n+1}P_n' + \dfrac{n+2}{2}P_n$,

(b) $P_{n+1}' = xP_n' + (n+1)P_n$,

(c) $\dfrac{d}{dx}[(x^2-1)P_n'] - n(n+1)P_n = 0$.

9. 试求微分方程

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)P_n'] - n(n+1)P_n = 0$$

的多项式的解

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

10. 试利用二项式定理确定多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

*11. 设 $\lambda_{n,p}(x) = \binom{p}{n} x^n(1-x)^{p-n}, n = 0,1,2,\cdots,p$. 试证明

$$1 = \sum_{n=0}^{p} \lambda_{n,p}(x),$$

$$x^k = \sum_{n=k}^{p} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{p}{k}} \lambda_{n,p}(x);$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$x^p = \lambda_{p,p}(x);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3.4 节, 第 250 页

1. 设函数 $f(x)$ 满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

(a) 试证明: 如果 $f(x)$ 是可微的, 则或者 $f(x) \equiv 0$, 或者 $f(x) = e^{ax}$;

*(b) 如果 $f(x)$ 是连续的, 则或者 $f(x) \equiv 0$, 或者 $f(x) = e^{ax}$.

2. 如果可微函数 $f(x)$ 满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

则 $f(x) = a\log x$.

3. 试证明: 如果 $f(x)$ 是连续的, 并且

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

则 $f(x)$ 恒等于零.

3.5 节，第 256 页

1 试证明公式

$$\sinh a + \sinh b = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

并求对于 $\sinh a - \sinh b, \cosh a + \cosh b, \cosh a - \cosh b$ 的类似的公式.

2 试通过 $\tanh a$ 和 $\tanh b$ 来表示 $\tanh(a+b)$，通过 $\coth a$ 和 $\coth b$ 来表示 $\coth(a \pm b)$；通过 $\cosh a$ 来表示 $\sinh \frac{1}{2}a$ 和 $\cosh \frac{1}{2}a$.

3. 试微分

(a) $\cosh x + \sinh x$; (b) $e^{\tanh x + \coth x}$;

(c) $\log\sinh(x + \cosh^2 x)$; (d) $\operatorname{ar}\cosh x + \operatorname{ar}\sinh x$,

(e) $\operatorname{ar}\sinh(\alpha\cosh x)$;

(f) $\operatorname{ar}\tanh\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

4. 试计算由悬链线 $y = \cosh x$，直线 $x = a$ 和 $x = b$ 以及 x 轴围成的面积.

3.6 节，第 265 页

1. 试确定 $x^3 + 3px + q$ 的最大值、最小值和拐点，并讨论 $x^3 + 3px + q$ 之根的性质.

2. 给定抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$，以及抛物线内侧 $(\eta^2 < 2p\xi)$ 的一点 $P(x = \xi, y = \eta)$，试求从点 P 到抛物线上的一点 Q，再到抛物线的焦点 $F(x = \frac{1}{2}p, y = 0)$ 的最短路径 (由二直线段组成). 试证明：该角 FQP 被抛物线法线二等分，且 QP 平行于抛物线的轴 (抛物镜原理).

3. 试证明：在具有给定底边和给定顶角的一切三角形中，等腰三角形面积最大.

4. 试证明：在具有给定底边和给定面积的一切三角形中，等腰三角形顶角最大.

*5 试证明：在具有给定面积的一切三角形中，等边三角形周长最小.

*6 试证明：在具有给定周长的一切三角形中，等边三角形面积最大.

*7. 试证明：在圆的一切内接三角形中，等边三角形面积最大.

8. 试证明：如果 $p > 1, x > 0$，则 $x^p - 1 \geq p(x-1)$.

9. 试证明不等式 $1 > \dfrac{\sin x}{x} \geq \dfrac{2}{\pi}$，其中 $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

10. 试证明：(a)$\tan x > x$，其中 $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$，(b)$\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

11. 给定 $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$，当 $x > 0$ 时，试确定

$$\frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x}}$$

的极小值．利用这个结果，由数学归纳法证明 (参见第 121 页，问题 13)

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

12. 给定 n 个固定的数 $a_1, \cdots, a_n$，试确定 x，

(a) 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - x)^2$ 为最小；

*(b) 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - x|$ 为最小；

*(c) 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i - x|$ 为最小，其中 $\lambda_i > 0$.

13. 试描绘函数

$$y = (x^2)^x, \quad y(0) = 1$$

的图形；证明这个函数在 $x = 0$ 处是连续的．这个函数是否具有最大值、最小值或拐点？

14. 对于一切正的 x，试求满足

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > e$$

的最小的 α 值.（提示：已知 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ 单调减少，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 单调增加，当 $x\to+\infty$ 时都趋向于极限 e.）

*15. (a) 试求与三角形三边的距离之和为最小的点.

(b) 试求与三角形三个顶点的距离之和为最小的点.

16 试证明下列不等式：

(a) $e^x > \dfrac{1}{1+x}, x>0$;

(b) $e^x > 1+\log(1+x), x>0$;

(c) $e^x > 1+(1+x)\log(1+x), x>0$.

17. 假设在 (a,b) 上 $f''(x)<0$，试证明：

(a) 在区间 (a,b) 内，函数图形的每一段弧都位于连接其端点的弦线的上方.

(b) 在区间 (a,b) 内，函数图形位于任一点的切线的下方.

18. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数.

(a) 试证明：问题 17 的条件 (a) 或 (b) 对于 $f''(x)\le 0$ 是充分的；

(b) 试证明：对于 (a,b) 中的一切 x 和 y，条件

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\ge\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

对于 $f''(x)\le 0$ 是充分的.

*19. 设 a,b 是两个正数，p 和 q 是不等于零的任何数且 $p<q$. 试证明：对于区间 $0<\theta<1$ 中的一切 θ 值，有

$$\frac{[\theta a^p+(1-\theta)b^p]^{1/p}}{[\theta a^q+(1-\theta)b^q]^{1/q}}<1.$$

[这是詹森 (Jensen) 不等式，它表明两个正数 a,b 的 p 次幂平均 $[\theta a^p+(1-\theta)b^p]^{1/p}$ 均是 p 的增加函数.]

20. 试证明：在上面的不等式中，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

21. 试证明：$\lim\limits_{p\to\infty}[\theta a^p+(1-\theta)b^p]^{1/p}=a^\theta b^{1-\theta}$.

22. 如果将 a,b 的零幂平均定义为 $a^{\theta}b^{1-\theta}$, 试证明: 詹森不等式适用于这种情况, 并且有 $(a\neq b)$ $a^{\theta}b^{1-\theta}\gtrless[\theta a^{q}+(1-\theta)b^{q}]^{1/q}$, 当 $q\lessgtr 0$ 时. 当 $q=1$ 时, $a^{\theta}b^{1-\theta}\le\theta a+(1-\theta)b$

23. 试证明(不要根据詹森不等式)不等式

$$a^{\theta}b^{1-\theta}<\theta a+(1-\theta)b,$$

其中 $a,b>0, 0<\theta<1$, 并证明仅当 $a=b$ 时等式成立. [这个不等式说明: $(\theta,1-\theta)$ 几何平均值小于相应的算术平均值.]

*24 设 f 在 $[a,b]$ 上是连续的和正的, M 表示其最大值. 试证明:

$$M=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}.$$

3.7 节, 第 278 页

1. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且当 $x=0$ 时 $f(x)$ 及其一阶导数均为零. 试证明: 当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是比 x 更高阶的无穷小.

2. 试证明:

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$

其中 $a_0,b_0\neq 0$, 当 $x\to\infty$ 时, 与 x^{n-m} 具有相同的量阶.

*3. 试证明: e^x 不是有理函数.

*4. 试证明: e^x 不能满足以 x 的多项式为系数的代数方程.

5. 如果当 $x\to\infty$ 时正值函数 $f(x)$ 的量阶高于 x^m 的量阶, 或与 x^m 的量阶相同, 或低于 x^m 的量阶, 试证明: $\int_a^x f(t)dt$ 的量阶相应地高于 x^{m+1} 的量阶, 与 x^{m+1} 的量阶相同, 或低于 x^{m+1} 的量阶.

6. 试比较当 $x\to\infty$ 时 $\int_a^x f(t)dt$ 相对于下列 $f(x)$ 的量阶:

(a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; (b) e^x; (c) xe^{x^2}; (d) $\log x$.

3.8 节，第 295 页

1 试求 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限.

*2. 试求

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-0}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

的极限.

*3. 如果 α 是任何大于 -1 的实数，试求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

3.11 节，第 308 页

1. 试证明：对于一切奇正数 n, 则积分 $\int e^{-x^2}x^n dx$ 可以通过初等函数来计算.

2 试证明：如果 n 是偶数，则积分 $\int e^{-x^2}x^n dx$ 可以通过初等函数和积分 $\int e^{-x^2}dx$ 来计算 (对于 $\int e^{-x^2}dx$, 已编制成表)

3. 试证明：

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right] du = \int_0^x f(u)(x-u)du.$$

*4 问题 3 给出二重迭次积分的公式. 试证明 $f(x)$ 的 n 重迭次积分由下列公式给出：

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(u)(x-u)^{n-1}du.$$

5. 试证明：对于二项式系数 $\binom{n}{k}$, 有关系式

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right]^{-1}$$

6. 试求对于

$$\int x^p(ax^n+b)^q dx$$

的递推关系式，并利用这个关系式来积分

$$\int x^3(x^7+1)^4 dx.$$

*7. 设 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$;

(a) 试证明: $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=0$, 如果 $m\neq n$;

(b) 试证明: $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$;

(c) 试证明: $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx=0$, 如果 $m<n$;

(d) 试计算: $\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx$.

3.12 节，第 317 页

*1. 计算积分

$$\int \frac{dx}{x^6+1}.$$

2. 试利用部分分式展开来证明牛顿公式

$$\frac{\alpha_1^k}{g'(\alpha_1)}+\frac{\alpha_2^k}{g'(\alpha_2)}+\cdots+\frac{\alpha_n^k}{g'(\alpha_n)}=\begin{cases}0 & 当k=0,1,2,\cdots,n-2时,\\ 1 & 当k=n-1时,\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是形为 $x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots$ 的多项式, 具有不同的根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

3.14 节，第 334 页

1. 试证明: 经过置换 $x=(\alpha t+\beta)/(\gamma t+\delta), \alpha\delta-\gamma\beta\neq 0$, 积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}}$$

变为同类型的积分，并证明：如果四次式

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

没有相重的因式，则替换后新的 t 的四次式也没有相重的因式．试证明：对于

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})dx$$

也有同样的情况，其中 R 表示有理函数．

2．函数

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

称为**第一类椭圆积分**．

(a) 试证明：φ 是连续的、递增的，因而具有连续的反函数．

(b) 设 am (x) 表示 $\varphi(x)$ 的反函数．试证明：$\mathrm{sn}(x) = \sin[\mathrm{am}(x)]$，其中 sn (x) 按第 320 页脚注 2 来定义．

3.15 节，第 337 页

*1．试证明：$\int_0^\infty \sin^2\left[\pi\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]dx$ 不存在．

*2．试证明：$\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + kx^{10}} = 0.$

3．试问对于怎样的 s 值下列积分是收敛的？

(a) $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}dx$，(b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}dx$．

*4．$\int_0^\infty \frac{\sin t}{1+t}dt$ 是否收敛？

*5．(a) 如果 a 是固定的正数，试证明：

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-a}^{a} \frac{h}{h^2 + x^2}dx = \pi.$$

(b) 如果 $f(x)$ 在区间 $-1 \le x \le 1$ 上是连续的，试证明：

$$\lim_{h\to 0} \int_{-1}^{+1} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)dx = \pi f(0).$$

*6．试证明：$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}dt = 0.$

7. 假设 $|\alpha| \neq |\beta|$, 试证明:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sin\alpha x \sin\beta x dx = 0.$$

*8. 如果对于任何正的值 a, $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 并且当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 趋向于极限 L, 试证明对于正的 α 和 β, $\int_a^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx$ 收敛, 并且具有值 $L\log\frac{\beta}{\alpha}$.

9. 参考问题 8, 试证明:

(a) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx = \log\frac{\beta}{\alpha}$;

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}dx = \log\frac{\beta}{\alpha}$.

*10. 如果对于任何正的值 a 和 b, $\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 并且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 趋向于极限 M, 当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 趋向于极限 L, 试证明:

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = (L-M)\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

11. 试求伽玛函数的下列表达式:

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}dx,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx.$$

3.16 节, 第 350 页

1. 试求 $\sin(x+y)$ 的加法公式.

2. 不用加法公式, 试证明 $\cos x$ 是偶函数, $\sin x$ 是奇函数.

3. *(a) 对于某一正的 h, 试证明: 当 $0<x<h$ 时, $\cos x<1$;

(b) 如果当 $0\le z\le 2^n x$ 时 $\cos z>0$, 试证明:

$$\cos(2^{n+1}x) < 2^n(\cos x - 1) + 1.$$

(c) 结合 (a) 和 (b) 的结果，试证明： $\cos x$ 具有零点.

4. 设 a 是 $\cos x$ 的最小的正零点. 试证明：

$$\sin(x+4a)=\sin x,$$
$$\cos(x+4a)=\cos x.$$

5. 试补充下面关于 $\cos x$ 具有零点的间接证明的各步：

(a) 如果 $\cos x$ 没有零点，则当 $x\geq 0$ 时 $\sin x$ 是单调增加的;

(b) 函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 上有界和下有界;

(c) 当 x 趋向于无穷大时 $\sin x$ 的极限存在并且是正的;

(d) 方程

$$\cos x=1-\int_0^x \sin t dt$$

成立，与 (b) 相矛盾.

杂题

1. 试证明：

$$\frac{d^n}{dx^n}f(\log x)=x^{-n}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{d}{dt}-2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{d}{dt}-n+1\right)f(t),$$

其中 $t=\log x$. 这里，我们使用记号

$$\left(\frac{d}{dt}-k\right)\varphi=\frac{d\varphi}{dt}-k\varphi,$$

其中 φ 是 t 的任一函数， k 是常数.

2. 光滑封闭曲线 C 称为凸的，如果它整个位于每一条切线的同一侧. 试证明：对于外切于 C 的面积最小的三角形，它的每一边都在其中点与 C 相切.